1987年度談話会アブストラクト集
北海道大学理学部数学教室

Edited by T. Yoshida

Series #6. April, 1988

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

1987年度 談話会アブストラクト

ﾍﾟｰｼﾞ

談話会

$\mathcal{D}$-modules associated to singular foliations

4.15
T. Suwa

Singular foliation とは

coherent
integrable sheaf $\underset{\text{subsheaf}}{\subset}$ tangent sheaf.

⇝ normal sheaf $\longrightarrow$ { characteristic classes
Bott residues

normal 方向の differential operators のなす sheaf.

↑ $\mathcal{D}$-module theory を apply してみたい.

§1. Generalities

X : complex mfd. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$: structure sheaf
(holom. fct. germs の sheaf)

$\mathcal{D}_X$: linear diff. operators ($\mathcal{O}$-coeff.) の sheaf

locally

$$\mathcal{D} \ni P \underset{loc.}{=} \sum f_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

TX : holom. tan. bdl. T^*X : holom. cotan. bdl.

$\Omega^q := \mathcal{O}(\Lambda^q T^*X)$

$\Theta^p := \mathcal{O}(\Lambda^p TX)$, 特に $\Theta := \Theta^1$

$\mathcal{O}$: typical left $\mathcal{D}$-module : $P(f) =: Pf$

Ω^n : — " — right — " — : (うらへ)

$\upsilon \in \Theta$, $\omega \in \Omega^n$ ↙最高次

$\omega^{\upsilon} = -L_{\upsilon}\omega$

locally free resolutions

$$0 \to \mathcal{D} \otimes \Theta^n \to \cdots \to \mathcal{D} \otimes \Theta^2 \to \mathcal{D} \otimes \Theta \to \mathcal{D} \to \mathcal{O} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{D} \to \Omega^1 \otimes \mathcal{D} \to \Omega^2 \otimes \mathcal{D} \to \cdots \to \Omega^n \otimes \mathcal{D} \to \Omega^n \to 0$$

「 diff. eq. M は coherent.

$$\sum_{j=1}^{q} P_{ij} u_j = 0 \quad i=1,\cdots,p \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathcal{D}^p \xrightarrow{(P_{ij})} \mathcal{D}^q \to M \to 0$$
」

以下.

M : left $\mathcal{D}$-module 又は その complex.

N : right 〃 . とする.

<u>Dual</u>.

$DM := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{D})$: right modules の complex

$DN := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(N, \mathcal{D})$: left 〃 .

<u>examples</u>

$D\mathcal{O} = \Omega^n[-n]$, $D\Omega^n = \mathcal{O}[-n]$

<u>left ⟷ right</u>

$M^\vee := \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M$: right $\mathcal{D}$-module

$N^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\Omega^n, N)$: left 〃 .

examples

$$\mathcal{O}^{\vee} = \Omega^n, \quad \Omega^{n\vee} = \mathcal{O}$$

de Rham complex

$DRM := \Omega^n \otimes^L_{\mathcal{D}} M$ (Mの de Rham complex) は

$$\underset{(\deg=-n)}{0 \to M} \to \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} M \to \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} M \to \cdots \to \underset{(\deg=0)}{\Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M} \to 0$$

$$DRN := N \otimes^L_{\mathcal{D}} \mathcal{O}$$

examples

$$DR\mathcal{O} = (0 \to \mathcal{O} \to \Omega^1 \to \cdots \to \Omega^n \to 0) = \mathbb{C}[n]$$

"=" は derived category における等号
(cohomology の等しい complexes を同一視)

$$DR\Omega^n = \mathbb{C}[n]$$

Prop.

$$DRM^{\vee} = DRM, \quad DRN^{\vee} = DRN$$

Solution complex

$$Sol\, M := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$$

$$Sol\, N := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(N, \Omega^n)$$

<u>Prop.</u>

M (resp. N) : coherent.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Sol}(DM) = DRM$, $DR(DRM) = \mathrm{Sol}\, M$

(resp. $\mathrm{Sol}(DN) = DRN$, $DR(DRN) = \mathrm{Sol}\, N$)

$\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_k$, $\mathcal{D}_k$: order $\leq k$ の diff. operators

$$\begin{aligned} gr\,\mathcal{D} &= \bigoplus \mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k-1} \\ &\parallel \\ \mathcal{O}_{T^*X} & \end{aligned}$$

holom. fct.s on T^*X polynomial along fibres

$M = \bigcup M_k$ (M_k) : "good" filtration

$\uparrow$ coherent

$$gr\, M = \bigoplus M_k / M_{k-1}$$

$$\mathcal{D}_i M_k \subset M_{i+k}$$

$I := \mathrm{Ann}(gr\, M) \subset gr\,\mathcal{D}$

$\sqrt{I}$ で def. される T^*X の subvariety を

<u>M の</u> <u>characteristic</u> <u>variety</u> といい $\mathrm{Char}\, M$ で表わす.

Bernstein – Kashiwara :

$n \leq \dim \mathrm{Char}\, M$ $(\leq 2n)$ ("=": holonomic)

§2 $\mathcal{D}$-module の Riemann-Roch

(Malgrange, Angéniol-Lejeune)

$K(\mathcal{O}_X)$: coherent $\mathcal{O}_X$-modules の Groth. group

$K(\mathcal{D}_X)$: (good filtration をもつ) coherent $\mathcal{D}$-modules の Groth. group

$K(\mathcal{O}_{T^*X})$: coherent $\mathcal{O}_{T^*X}$-modules の Groth. group

Theorem (Quillen, Malgrange)

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, shift right, "\delta"'] \arrow[dr, "gr"'] & & K(\mathcal{O}_X) \arrow[ll, shift right, "\rho"'] \\ & K(\mathcal{O}_{T^*}) \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

map はすべて iso.

$\alpha(\mathcal{L}) := Li^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^n$

$\rho(\mathcal{S}) := \mathcal{D} \otimes \mathcal{S} \otimes \Theta^n$

$\delta := \alpha \circ gr$

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[d, "\pi"'] \\ X \arrow[u, bend right, "i"'] \end{tikzcd}$$
i : 0-section

δ はもっと具体的に表わせる (Malgronge)

$M \longrightarrow DRM$

(M_k) ← これは次の complexes で filtered される.

$F^k(DRM)$: $0 \to M_k \to \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} M_{k+1} \to \cdots\cdots \to \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M_{k+n} \to 0$

(coherent $\mathcal{O}$-modules の complex)

Prop.

$k \gg 0 \Rightarrow \quad DRM \underset{Q\text{-}iso}{\simeq} F^k(DRM)$

(quasi-iso. i.e. cohomology level で一致)

したがって

DRM は $K(\mathcal{O}_X)$ の元を定める.

Prop.

$\mathcal{S}(M) = DRM \quad \text{in } K(\mathcal{O}_X)$

よって [R-R for $\mathcal{O}_X$-module] から

[R-R for $\mathcal{D}$-module] が出る.

Theorem (Global index theorem for $\mathcal{D}$-modules)

X : cpt. cpx. mfd.

$$\chi(X, DRM) = \int_X ch(L\,i^* gr M \otimes \Omega^n)\, Td X$$

特に M : holonomic

$\Rightarrow \quad \underset{\text{右辺}}{RHS} = (-1)^n \, Char M \cdot X \quad \text{in } T^*X$

これは Dubson index thm.

§3 Singular foliation

$\mathcal{S}$: coherent $\mathcal{O}_X$-module

$Sing\, \mathcal{S} := \{ x \in X \mid \mathcal{S}_x \text{ is not free } \mathcal{O}_{X,x}\text{-module} \}$

$\mathrm{rank}\, \mathcal{S} := \mathrm{rank}\left(\mathcal{S}|_{X \setminus \mathrm{Sing}\, \mathcal{S}}\right)$

$E \subset \Theta$: coherent に対し

$\Theta_E := \Theta / E$: normal sheaf

$S(E) \underset{\text{def.}}{:=} \mathrm{Sing}\, \Theta_E \quad (\supset \mathrm{Sing}\, E)$

Def.
$E \subset \Theta$: coherent
が singular foliation とは

(1) integrable : $[E_x, E_x] \subset E_x$, $x \in X \setminus S(E)$

(2) full in Θ.

$\mathrm{rank}\, E = p$ のとき、E は $X - S(E)$ 上の dim. p の普通の foliation

例 $p = 1$

$E = (v)$, v : a vector field

$S(E) = \{x \mid v(x) = 0\}$

singular fol. E に対し

$\mathcal{D}E \underset{\text{loc.}}{:=} \left(\begin{array}{l} v_1, \cdots, v_p : E \text{ の loc. generators のとき} \\ \{\sum_{i=1}^{p} P_i v_i\} \text{ で生成される } \mathcal{D}\text{-module} \end{array} \right)$

$\mathcal{D}_E := \mathcal{D} / \mathcal{D}E$: E に associate した $\mathcal{D}$-module

Remarks

1° Char $\mathcal{D}_E$ は E の conormal space に一致

$$\dim \operatorname{Char} \mathcal{D}_E = 2n - p$$

2° Char $\mathcal{D}_E$ の non-sing. part には E を持ち上げた fol. がある

Theorem (Global index theorem for singular foliations)

X : cpt. cpx. mfd.

$$\chi(X, \operatorname{Sol} \mathcal{D}_E) = \int_X ch\left(L i^* gr\, DM^\vee \otimes \Omega^n\right) Td\, X$$

Theorem (fol. の sing) = (normal sheaf の sing) はあるかもしれない

E が locally free, of rank p のとき

$$\chi(X, \operatorname{Sol} \mathcal{D}_E) = \int_X td\, \Theta_E \cdot c_p(E)$$

$$\operatorname{Sol} \mathcal{D}_E : \quad 0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{d_E} E^* \xrightarrow{d_E} \wedge^2 E^* \xrightarrow{d_E} \cdots \to \wedge^p E^* \to 0$$

$$d_E(f) := \sum_{i=1}^{p} v_i(f) \varphi_i \qquad \left(\begin{array}{l} (v_1, \cdots, v_p) : \text{loc. basis for } E \\ (\varphi_1, \cdots, \varphi_p) : \text{dual basis} \end{array}\right.$$

0-th cohomology

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_E, \mathcal{O}) = \mathcal{O}_E = \left(\begin{array}{l} \text{the sheaf of germs of holom. fct.} \\ \text{constant along leaves} \end{array}\right)$$

Special cases

1) E : non-sing

Poincaré lemma

$$\mathrm{Sol}\,\mathcal{D}_E \simeq \mathcal{O}_E \quad \text{Q-iso.}$$ (higher cohomology は消える)

$$\chi(X, \mathcal{O}_E) = \int_X \mathrm{td}\,\Theta_E \cdot c_p(E)$$

2) $E = TX$ $\left(\begin{array}{l} \mathcal{O}_E = \mathbb{C} \\ \Theta_E = 0 \end{array}\right)$

$$\chi(X, \mathbb{C}) = \int_X c_n(X)$$

3) $E = 0$ $\left(\begin{array}{l} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_X \\ \Theta_E = \Theta_X \end{array}\right)$

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \int_X \mathrm{Td}\,X$$

4) E が Γ-vector field をもつとき

右辺は localize され、Bott residue で表わせる

→ Bott の定理の拡張

v : vector field on X with isolated zeros

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{p \in \mathrm{Zero}\,v} (\text{local Todd \# at } p)$$

$\square$

別の例

次頁

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$ で生成されるとき

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathcal{O} \to E^* \to 0 \\ \qquad\quad \wr\!\mid \\ \qquad\quad \mathcal{O} \\ f \longmapsto v(f) \end{array}$$

$$\mathcal{H}om = \mathcal{O}_E = \{ f \in \mathcal{O} \mid v(f) = 0 \} = \begin{cases} \mathbb{C} & : x = 0 \\ \infty\text{-dim} & : x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_E, \mathcal{O}) = \mathcal{O} \big/ \{ v(f) \mid f \in \mathcal{O} \} = \begin{cases} \mathbb{C} & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0. \end{cases}$$

1987年4月22日 談話会

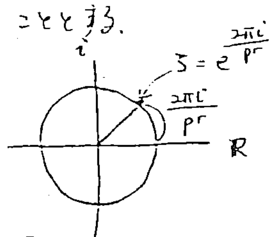
Galois 表現について.　　　肥田晴三

今日は有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ についての p-進 Galois 表現, すなわち Galois 群からの (連続) 表現

$$\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_n(A)$$

をどのように数論的に捉えるべきかについて明らかにしたい. ここで A としては $\mathbb{Z}_p$ 上の algebra を取る. たとえば A として $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ あるいは $\mathbb{Q}_p$ 等々をとることができる. (ここで p は素数で以下これを固定する).

1等簡単な Galois 表現の例は多分円分体から得られる物であろう. 今 μ_{p^r} で $\overline{\mathbb{Q}}$ の中での 1 の p^r 乗根全体のなす群を示すこととする.



このとき μ_{p^r} は位数が p^r の巡回群でその生成元を $\zeta = \zeta_{p^r}$ とすると, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ をかんたんのために G とかけば, $\sigma \in G$ について ζ^σ は再び 1 の p^r 乗根だから $\zeta^\sigma = \zeta^{\chi_r(\sigma)}$ $\chi_r(\sigma) \in \mathbb{Z}$ とかける. 勿論 $\chi_r(\sigma)$ は mod p^r で一意的に定まる. これより F_r で $\mathbb{Q}$ 上 ζ_{p^r} で生成される体を示せば $F_r/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大で $r > s$ について $F_r \supset F_s$ でさらに次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\chi_\infty", "\cong"'] \arrow[d] & \mathbb{Z}_p^\times = \varprojlim_r (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \arrow[r, hook, "\iota_\infty"] \arrow[d] & \Lambda = \varprojlim_r \Lambda_r \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\sigma \mapsto \sigma|_{F_r}"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(F_r/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\chi_r", "\cong"'] \arrow[d] & (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \ni \ell \arrow[r, hook, "\iota_r"] \arrow[d] & \Lambda_r = \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times] \arrow[d] \\
G \arrow[r] & \mathrm{Gal}(F_s/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\chi_s", "\cong"'] & (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^\times \ni \ell \bmod p^s \arrow[r, hook, "\iota_s"] & \Lambda_s = \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^\times]
\end{tikzcd}$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{F_r}, \qquad \sigma \mapsto \sigma|_{F_s}$$

この図式の射影的極限をとることによって次の2つの Galois 表現を得る: $F_\infty = \bigcup_r F_r$ とし

$$\chi_\infty : G \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^\times = GL_1(\mathbb{Z}_p)$$

$$\Pi = \iota_\infty \circ \chi_\infty : G \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \Lambda = \varprojlim_r \Lambda_r .$$

一般に χ_∞ は cyclotomic character と呼ばれ今まで良く考察されて来た。
ここで注目したいのは Π の方である。

(このような環を p-進局所環ということとする)

そこでまず環 $\mathcal{A}$ の特徴付けについて考えよう。以下 A とかけば常に $\mathbb{Z}_p$ 上の局所環でその極大ideal m_A について $A \cong \varprojlim_r A/m_A^r$ でかつ A/m_A^r はすべて Artin 環であるとする。たとえば A として $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_r \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p[[X]]$ 等を取ることが出来る。$\mathcal{A}$ が群環の極限であることと、群環自身の普遍性より次のような普遍性を $\mathcal{A}$ がもつことが知られている。すなわち $\varepsilon: \mathbb{Z}_p^\times \to A^\times$ なる連続な群の homomorphism が与えられたら これが $\varepsilon_a: \mathcal{A} \to A$ なる $\mathbb{Z}_p$-algebra の homomorphism に一意的に拡がって、次の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p^\times \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\iota_\infty"'] & A \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\varepsilon_a"'] & \end{tikzcd}$$

この普遍性のために $\mathcal{A}$ は位相群 $\mathbb{Z}_p^\times$ の連続群環と呼ばれ たびたび $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ とかかれる。

χ_∞ によって $Gal(F_\infty/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^\times$ となることから、$\mathcal{A}$ の普遍性を使えば 表現 Π は次のような普遍性をもつ。すなわち $\varepsilon: Gal(F_\infty/\mathbb{Q}) \to A^\times$ なる連続指標が与えられれば $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi_\varepsilon: \mathcal{A} \to A$ が一意的に存在して $\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \Pi$ とかける。

Kronecker によって F_∞ が次の特徴付けをもつことが知られている:

Theorem (Kronecker) <u>F_∞ は $\mathbb{Q}$ 上 p の外で不分岐な最大 abel 拡大である</u>。

ここで有限次拡大 $F/\mathbb{Q}$ が p の外で不分岐とは p と異なる素数 ℓ を F で素ideal の積に分解したとき、平方因子を含まないことである。この定理は F_∞ の部分体は p の外で不分岐で、逆に p の外で不分岐な abel 拡大体 $F/\mathbb{Q}$ が存在すれば $F_\infty \supset F$ となることを云っている。

一般に Galois 表現 $\pi: G \to GL_n(A)$ が与えられれば $Ker(\pi)$ は G の部分群で Galois 理論により $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体 $F(\pi)$ で $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F(\pi)) = Ker(\pi)$ となる。ここで $F(\pi) = \{x \in \overline{\mathbb{Q}} \mid x^\sigma = x \text{ for all } \sigma \in Ker(\pi)\}$ である。

そこで π が p の外で不分岐ということを $F(\pi)$ が p の外で不分岐ということで定義する. このとき Kroneckerの定理より $\Pi : G \to GL_1(\mathcal{A})$ の普遍性は F_∞ を使わずに次のようにいい変えられる: p の外で不分岐連続指標 $\varepsilon : G \longrightarrow GL_1(A)$ が与えられれば $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi_\varepsilon : \mathcal{A} \to A$ が一意的に存在して $\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \Pi$ とかける.

同じ普遍性をみたす表現の存在を GL_n への表現についても問うことが出来る. この問題を検討するために GL_1 の場合をさらに調べる. すなわち環 $\mathcal{A}$ の構造についてもう少し詳しく見てみよう. まず $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ は位数 $p^{r-1}(p-1)$ の巡回群であるから一意的に位数 $p-1$ の巡回群 μ_{p-1} と位数 p^{r-1} の巡回群 Γ_r との積に書ける. すなわち

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times = \Gamma_r \times \mu_{p-1}$$

である. よって $\mathcal{A}_r = \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times] = (\mathbb{Z}_p[\mu_{p-1}])[\Gamma_r]$ とかける.

一方 $\mathbb{Z}_p^\times = \varprojlim_r (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times = \mu_{p-1} \times \varprojlim_r \Gamma_r = \mu_{p-1} \times \Gamma$ である.

よって $\mathbb{Z}_p$ の中には 1の $p-1$ 乗根がすべて入っている. このことから $\omega : \mu_{p-1} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ をこの自然な inclusion とすれば μ_{p-1} の指標は ω^a $(a=1,\dots,p-1)$ で尽きる. このことから

$$\mathbb{Z}_p[\mu_{p-1}] = \overbrace{\underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{a} \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}^{p-1}$$

$$\mu_{p-1} \ni \zeta \longmapsto \omega(\zeta)^a$$

がわかる. よって $\mathcal{A}_r = \mathbb{Z}_p[\Gamma_r] \times \cdots \times \mathbb{Z}_p[\Gamma_r]$,

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]] = \Lambda \times \cdots \times \Lambda \times \cdots \times \Lambda, \quad \Lambda = \varprojlim_r \mathbb{Z}_p[\Gamma_r] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$$

$$(\gamma,\zeta) \longmapsto \omega(\zeta)^a \gamma$$

となる. 今 Γ は位数 p^{r-1} の巡回群の射影的極限だから位相的には1つの元で生成される. そのような生成元 u を1つ固定すると Λ の構造はよくわかっていて

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cong \mathbb{Z}_p[[X]] : \text{一変数巾級数環}$$

$$u \longmapsto 1+X$$

が知られている. これより Λ は局所環で その極大 ideal m は p と X

で生成される. よって $\Lambda/m \cong \mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である. とくに $u \mapsto 1+X$ だから $u \equiv 1 \bmod m$ で u は生成元だったから 任意の $\gamma \in \Gamma$ について $\gamma \equiv 1 \bmod m$ である.

そこで 普遍的表現 $\Pi : G \to GL_1(\Lambda)$ の a 番目の成分 Λ への射影を π_a で示し $\rho_a = \pi_a \bmod m : G \to GL_1(\mathbb{F}_p)$ を考えよう. 任意の $\sigma \in G$ について $\chi_\infty(\sigma) = z = (\gamma, \zeta) \in \mathbb{Z}_p^\times = \Gamma \times \mu_{p-1}$ とかくとき $\mu_{p-1} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{F}_p^\times$ だから $\pi_a(\sigma) = \omega(\zeta)^a \gamma \equiv \omega(\zeta)^a \bmod m$ となり, 選んだ component は $\pi_a \bmod m = \rho_a$ で決まる. このことから π_a は次の普遍性をもつ. pの外で不分岐な連続指標 $\varepsilon : G \to GL_1(A)$ が, Aの極大ideal m_A について, $\varepsilon \bmod m_A = \rho_a$ をみたせば, $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi_\varepsilon : \Lambda \to A$ が一意的に存在して $\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \pi_a$ となる. すなわち π_a は $\pi \bmod m_A = \rho_a$ となる表現たちの中で最も普遍的なものである.

このような普遍表現の GL_n への一般化を考えよう. ρ_a に代るものとして p の外で不分岐な既約表現 $\rho : G \to GL_n(\mathbb{F}_p)$ を1つ固定する. 今 環 $R = R_\rho$ と pの外で不分岐な 連続表現 $\Pi : G \to GL_n(R_\rho)$ の組が ρ について普遍的であるとは次がみたされることである: pの外で不分岐な連続表現 $\pi : G \to GL_n(A)$ が $\pi \bmod m_A = \rho$ をみたせば ある $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi : R \to A$ が存在して $\pi \sim \varphi \circ \Pi$ となる. (注意: ここで φ はただ1つとは限らない).

Theorem (Mazur). 各々の ρ について, 次の条件をみたす (p-進位相について完備な) $\mathbb{Z}_p$-algebra $R = R_\rho$ と連続な表現 $\pi^{univ} : G \to GL_n(R_\rho)$ の組が一意的に存在する:

(i) R は noether 局所環で その極大ideal m について $R = \varprojlim_r R/m^r$ かつ R/m^r は有限環で $R/m \cong \mathbb{F}_p$ である. (R は p-進局所環).

(ii) (R, π^{univ}) は ρ について普遍的

(iii) R は (i), (ii) をみたす環の内で minimal である. (もう1つ (i) (ii) をみたす R' があれば (ii) による自然な準同型 : $R' \to R$ が全射である).

$n=1$ で $\rho=\rho_a$ ならば 多分 いままでの議論で R_ρ は Λ で与えられる. この algebra Λ は 別名 岩澤algebra と呼ばれ, 岩澤理論では よく現れる物であるが, これを使うと便利だという以外に その存在理由は 今まで明確ではなかった.

さて 一般の ρ について Mazur の定理で 保証される環 R_ρ を 具体的に作るのが 次の目標である. そこで R の構造をみるために $\det\circ\rho : G \to GL_1(\mathbb{F}_p)$ を 考えれば $1 \leqq a \leqq p-1$ が 存在して $\det\circ\rho=\rho_a$ となる. このとき (Λ, π_a) の 普遍性から $\varphi : \Lambda \to R$ なる 局所環の準同型で $\det\circ\pi^{univ} = \varphi\circ\pi_a$ をみたす物が ただ1つ ある. よって R は 標準的に Λ 上の algebra となる.

$n=2$ のときに R あるいは その一部を 具体的に 作る問題を考える. すなわち $\rho : G \to GL_2(\mathbb{F}_p)$ を 既約な p の外で 不分岐な表現とする. R 自体は 大きすぎる (多分 Krull dim $R_\rho \geqq 4$? と考えられている) ので R の うまい剰余環を作り その構成問題を考える. 全部の $\pi \bmod m_A = \rho$ となる表現に関する普遍性の代りに さらに 表現に条件を付けて R の良い剰余環を定義し それを構成する方法を考えようということである.

そのために Galois群の 惰性部分群について説明する. 今 F を有限次代数体を走らせれば $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_F F$ だから $\overline{\mathbb{Q}}$ の整数環 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \bigcup_F \mathcal{O}_F$ で定義することが出来る. ここで $\mathcal{O}_F$ は F の整数環である. 素数 $l \in \mathbb{Z}$ について $\mathcal{O}$ の素ideal $\mathfrak{l}$ で $\mathfrak{l} \cap \mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$ なる物をとる. 今 $I_\mathfrak{l} = \{\sigma \in G \mid \mathfrak{l}^\sigma = \mathfrak{l}$ かつ すべての $x \in \mathcal{O}$ について $x^\sigma \equiv x \bmod \mathfrak{l}\}$ とおき $I_\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{l}$ の惰性群と呼ぶ. $I_\mathfrak{l}$ は 共役を除いて $\mathfrak{l}$ の取り方によらず定まる. Hilbert の理論によって $\pi : G \to GL_n(A)$ について

π が l で不分岐 $\Leftrightarrow$ $\pi(I_\mathfrak{l}) = \{1\}$ が知られている.

さて pの外で不分岐な表現 $\pi: G \to GL_2(A)$ について $\pi(I_p)$ の形に条件をつけて R を小さくする. 今 G を π で $A(\pi) = A^2$ に作用させて

$$H_0(I_p, A(\pi)) = A(\pi) \Big/ \sum_{\sigma\in G} (\pi(\sigma)-1)A(\pi)$$

を考える. これは I_p が trivial に作用する最大の商である. 今 π が ordinary ということを $H_0(I_p, A(\pi)) \cong A$ で定義する.
(これは $\pi(I_p)$ が $\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ の形をしているということである).
定理にある如く, ordinary な表現 $\rho: G \to GL_2(A)$ を固定すると, 環 R_ρ^{ord} と ordinary な表現 $\pi^{ord}: G \to GL_2(R_\rho^{ord})$ で, ordinary な表現でその極大 ideal での reduction が ρ となるものの中で普遍的なものがただ1つ存在する. 先程と同じ議論で R_ρ^{ord} は Λ 上の algebra となる.
R^{ord} だけでも具体的に作りたいというのが我々の願望である. そこでその作り方として有効であろうと思われる方法を述べる. GL_1 の時の (Λ, π_a) の構成法をまねる. GL_1 の場合の群環 A_r の代りをするのが Hecke algebra である.

今 $\Gamma_1(p^r) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, ad-bc>0,\ c\equiv 0 \bmod p^r,\ d\equiv 1 \bmod p^r\right\}$ を考え
この群に関する重さ2の保型形式の空間を $S(\Gamma_1(p^r))$ とおく.
各整数 n について この空間には Hecke 作用素 $T(n): S(\Gamma_1(p^r)) \to S(\Gamma_1(p^r))$ が定義される. Hecke algebra $h_r(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S(\Gamma_1(p^r)))$ の部分環で $\mathbb{Z}$ 上 $T(n)$ で生成されるものである. そこで

$$h_r(\mathbb{Z}_p) = h_r(\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p, \quad h_r(\mathbb{Q}_p) = h_r(\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$$

とおく.
$h_r(\mathbb{Z}_p)$ は $\mathbb{Z}_p$ 上階数有限で 自然に A_r 上の algebra の構造をもつ.
さらに $h_r(\mathbb{Z}_p)$ は次の標準的分解をもつ:

$$\begin{array}{ccccc} h_r(\mathbb{Z}_p) & = & h_r^{ord}(\mathbb{Z}_p) & \times & h_r^{s.s}(\mathbb{Z}_p) \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ T(p) & \longmapsto & \text{単数} & \times & \text{位相的巾零元}. \end{array}$$

さらに $r>s$ ならば $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi_s^r: h_r^{ord}(\mathbb{Z}_p) \to h_s^{ord}(\mathbb{Z}_p)$ があって次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd} A_r \arrow[r] \arrow[d, "proj."'] & h_r^{ord}(\mathbb{Z}_p) \ni T(n) \arrow[d, "\varphi_s^r"] \\ A_s \arrow[r] & h_s^{ord}(\mathbb{Z}_p) \ni T(n) \end{tikzcd}$$

最も重要なことは Eichler-志村によって p の外で不分岐かつ ordinary な表現 $G \to GL_2(h_r^{ord}(\mathbb{Q}_p))$ が存在して次の図式が可換となる:

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_r^{mod} & : & G & \longrightarrow & GL_2(h_r^{ord}(\mathbb{Q}_p)) \\
 & & \| & & \downarrow \varphi_s^r \\
\pi_s^{mod} & : & G & \longrightarrow & GL_2(h_s^{ord}(\mathbb{Q}_p)).
\end{array}
$$

予想 I 上の主張が $\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Z}_p$ に変えても正しい.

この予想は多くの場合にたしかめられている (Mazur, Wiles, Tilouine, Hida). とにかく予想 I を仮定する. このとき $\pi^{mod} = \varprojlim_r \pi_r^{mod} : G \to GL_2(h^{ord})$ とおく. ここで $h^{ord} = \varprojlim_r h_r^{ord}(\mathbb{Z}_p)$ である. さて $\rho : G \to GL_2(\mathbb{F}_p)$ が modular だということを ある $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi : h^{ord}(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{F}_p$ が存在して $\rho = \varphi \circ \pi_1^{mod}$ となることとして定義する. ρ が modular ならば h^{ord} の局所環である直積因子 R_ρ^{mod} がただ1つ存在して φ が factors through する. すなわち $h^{ord} \to R_\rho^{mod}$ なる射影を P_R とかいて

$$\pi_\rho^{mod} = P_R \circ \pi^{mod} : G \longrightarrow GL_2(R_\rho^{ord})$$

とおく. $(R_\rho^{ord}, \pi_\rho^{ord})$ の普遍性より Λ-algebra の全射準同型

$$\Phi : R_\rho^{ord} \to R_\rho^{mod}$$

が存在する.

予想 II (Mazur) ρ が ordinary でかつ modular なる $\Phi : R_\rho^{ord} \cong R_\rho^{mod}$.

一般に次の予想はよく知られている.

予想 III (Weil, Langlands, Serre). ρ が ordinary で $\det(\rho(\text{複素共役})) = -1$
$\Rightarrow$ ρ は modular.

以上の予想が正しければ R_ρ^{ord} は Hecke algebra によって作ることが出来るので R_ρ 自体も $h = \varprojlim h_r(\mathbb{Z}_p)$ の部分として作れるのではないかと考えられている.

集団遺伝学にあらわれる拡散過程

東京工業大・理　　志賀徳造

集団遺伝学にあらわれる次の2種類の拡散過程について、構成の問題、定常状態の分類及びその安定性を論じた。

(1)　state space :　$K_d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) : x_1 \geq 0, \cdots, x_d \geq 0, \sum_1^d x_i \leq 1\}$

generator :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i x_j \left(\sum_{k=1}^{d+1} \beta_k x_k - \beta_i - \beta_j \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ここで　$\beta_1, \cdots, \beta_{d+1}$: 正定数

$x_{d+1} = 1 - \beta_1 - \cdots - x_d$

(2)　state space :　$X = [0, 1]^S = \{x = (x_p)_{p \in S} : 0 \leq x_p \leq 1\}$

S : 可算無限集合.

generator :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{p \in S} x_p (1 - x_p) \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \sum_{p \in S} b_p(x) \frac{\partial}{\partial x_p}$$

これらの拡散作用素の特徴は、境界上で完全に退化していること、及び拡散係数を滑らかに全領域へ拡張出来ない点にあり従来の一般的方法の適用できない多い、新しいクラスに属する退化楕円型微分作用素である。対応する拡散過程の解析は確率微分方程式双対過程の解析等、確率論の手法で行なう。

The Geometry of Poisson Brackets

Alan Weinstein

University of Tokyo and University of California, Berkeley

Abstract

A *Poisson structure* on a manifold P is a Lie algebra structure on $C^\infty(P)$ for which the identity $\{fg,h\}=f\{g,h\}+\{f,h\}g$ holds. The "inside picture" of a Poisson manifold presents it as the total space of a singular foliation, each leaf of which carries a symplectic structure (i.e. a closed 2-form of maximal rank).

Recent work of M.V. Karasev and the speaker paints a fairly clear "outside picture" of Poisson manifolds. A *realization* of the Poisson manifold P consists of a symplectic manifold S and a submersion from S to P which is compatible with Poisson brackets. It turns out that, at least locally, there is a universal realization of any Poisson manifold which has the structure of a local *symplectic groupoid*. The construction of this realization is a strict generalization of Lie's construction of a local group for any Lie algebra.

An interesting problem, only partly solved at this time, is to characterize those Poisson manifolds which admit a *global* symplectic groupoid as realization.

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

62/6/11

Solomon's Zeta Function and Enumeration of Lattices over Orders

— John Knopfmacher

In 1977, L. Solomon introduced a wide-ranging but natural and concrete generalization of the Riemann and Dedekind zeta functions, as well as of K. Hey's zeta function for a simple $\mathbb{Q}$-algebra. The coefficients of Solomon's zeta function give the numbers of certain types of sub-lattices of varying finite index in a given arithmetical lattice over an order in a semisimple $\mathbb{Q}$-algebra, and in special cases these reduce to classical arithmetical functions.

The first main aim of this talk is to state and discuss results on the asymptotic average values of the coefficients of Solomon's zeta function. The problem of deriving best possible error estimates is discussed as well.

2/...

— 2 —

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Solomon's zeta function (continued):

The second major aim of this talk is to discuss and consider similar questions for a parallel type of zeta function, essentially implicit in Solomon's original definitions although not treated by him. The latter zeta function is one appropriate to the enumeration of lattices over orders in semisimple $\mathbb{F}_q(X)$-algebras, where $\mathbb{F}_q(X)$ is the field of rational functions in an indeterminate X over a finite field $\mathbb{F}_q$ with q elements.

Here much more explicit and complete results can be obtained for the coefficients than in the preceding situation, after first deriving analogues for the new zeta function of theorems first conjectured and partly proved by Solomon for the former function, which were later fully established for that case by C. J. Bushnell & I. Reiner.

[References

1. Analysis, Vol. 5 (1985), 29–42
2. Manuscripta Math., Vol. 53 (1985), 101–106.]

John Knopfmacher, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.

J. Tilouine

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Sapporo Wednesday, June 17, 1987

The purpose of the present talk is to explain a result of the speaker establishing a connection between Hida's congruence module and the Iwasawa module of the anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of an imaginary quadratic field.

In the first part of the talk we recall some definitions and basic results of Iwasawa theory:

1) $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K of a number field K.

2) If S is a set of primes of K above p, we define the Iwasawa module X_∞^S (resp. X_n^S ; $n \geq 0$) as the Galois group of the maximal abelian p-extension of K_∞ (resp K_n ; $n \geq 0$) unramified outside S, and we endow it with a structure of $\underbrace{\mathbb{Z}_p[[Gal(K_\infty/K)]]}_{\text{module over } \Lambda =}$ (resp. $\Lambda_n = \mathbb{Z}_p[Gal(K_n/K)]$).

3) We explain that the knowledge of the characteristic power series of X_∞^S (when it is Λ-torsion) gives a good grasp on the structure of X_n^S over Λ_n for all $n \geq 0$.

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Now, our result is the following. Take M an imaginary quadratic field, $p \neq 2,3$ a prime number which splits in M (in order to get a Λ-torsion module!). Take K to be the Ring-klassenkörper of M of conductor p and K_∞/K to be the anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension. We suppose for simplicity that the class number of M is 1, so that we have a basic anticyclotomic character κ. We take S to be the set of primes in K above one of the two primes in M above p. And we take the κ^i-part of X_∞^S. Then this is a torsion Λ-module and if $i \not\equiv 0,1$ mod. $p-1$, we prove that its characteristic power series is divisible by the characteristic power series of the congruence module attached by Hida to an eigenform (here the eigenform is $\Theta(z) = \sum \alpha^i e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha\bar{\alpha}z}$ if we suppose i even and strictly smaller than $p-1$).

(of integer in M)

The second part is devoted to the precise definition of this congruence module. So we recall the definition of the big Hecke algebra, its ordinary part, its structure of Λ-module and its control. We remark that the congruence module has a very simple structure as Λ-module and we compare

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

its characteristic power series to the Kubota-Leopoldt p-adic L-function, in the sense that it interpolates also special values of some L-function.

"The classification of finite conected hypermetric space"

Michel Deza

ABSTRACT

A finite distance space X,d $d: X^2 \to \mathbb{Z}$ is hypermetric (of negative type) if

$\Sigma\ a_x a_y d(x,y) \leq 0$ for all integral sequences $(a_x \mid x \in X)$ that sum to 1 (sum to 0). X,d is connected if the set $\{(x,y) \mid d(x,y)=1,\ x,\ y \in X\}$ is the edge set for a connected graph on X, and graphical if d is the path length distance for this graph. Then we prove

Theorem 1. A connected space X,d has negative type if and only if X may be realised as a subset of a Euclidean space $E, \|\ \|$, such that

(i) X contains 0 and spans E

(ii) $d(x,y) = 1/2\|x-y\|^2$ $(x,\ y \in X)$

(iii) $L = \mathbb{Z}X$ is a root lattice, i.e. an orthogonal direct sum of lattices of type A_n, D_n, E_6, E_7, and E_8.

Call a hypermetric space X,d complete if for each triple $x,\ y,\ z \in X$ with $d(y,z) = 1$ and $d(x,y) + 1 = d(x,z)$, there is a unique element $w \in X$ with $d(w,x) = 1$, $d(w,y) = d(x,z)$, and $d(w,z) = d(x,y)$. Then we also prove

Theorem 2. (i) A connected distance space is hypermetric if and only if it is isomorphic to a subspace of a complete connected hypermetric space.

(ii) The complete connected hypermetric spaces are graphical, and are precisely the Cartesian products of Johnson graphs, half cubes, Cocktail Party graphs, the Shafli graph on 27 vertices, and the Gosset graph on 56 vertices.

We finish by describing how a given connected hypermetric space may be canonically embedded in a complete one, and give some open problems.

Theorem 1 is an extention of a result of Schoenberg. Theorem 2 is obtained by applying a result of Assouad to show any connected hypermetric space may be identified with a subset of a minimal saturated set induced by a coset of some root lattice in its lattice of weights.

Two Topics related to spheres

(i) Central sections of convex bodies

(ii) Gauge invariant of contact Riemannian structures

1987.6.24　東京工大　　丹野修吉

(i)　ＫとＫ’を３次元Euclid空間内の中心対称凸体とする。中心は共に原点とする。原点を含む任意の平面Ｌに対して

「ＬによるＫとＫ’の断面の面積について $A(K\cap L) < A(K'\cap L)$ なら、体積について $V(K) < V(K')$ が成り立つか」

という問題を考察する。

単位球体Ｂからε-cap をカットした凸体Ｋを考える。Ｂの表面Ｓ上に中心対称となるように２Ｎ個の点 $\{\pm q_1, \ldots, \pm q_N\}$ を分布させる。各点 q を中心として、Ｓ上半径 ε の円を描いて、その線でカットする。これを $K(\varepsilon,N,\Theta)$ と書きあらわす。Θ は点の分布を示し、カットは重ならないものとする。

$K(\varepsilon,N,\Theta)$の体積と同じ体積をもつ半径Ｒの球体をＫ’とする。もし、各Ｌについて

$$A(K(\varepsilon,N,\Theta)\cap L) < \pi R^2$$

が成り立つようにできれば、反例が存在することになる。

$A(K(\varepsilon,N,\Theta)\cap L)$ のＬについての平均値を $M(\varepsilon,N)$ とすれば

定理Ａ．任意のεとＮについて　$M(\varepsilon,N) < \pi R^2$.

$N > 100$ に対して、分布 Θ_0' を「均質なモデル」として、ある方法で定義する。十分均質な筈であるとして、これをＨモデルと呼ぶ。

定理Ｂ．Ｈモデル Θ_0' について、あるＬがあって

$$A(K(\varepsilon,N,\Theta_0')\cap L) > \pi R^2.$$

注．Ｋが楕円体なら上の「... 」は成り立つ。(Busemann[PJM.1953])

注。等号の場合、つまり $A(K\cap L) = A(K'\cap L)$ が各Ｌについて成り立つならＫとＫ’は合同である。(Funk's integration Theorem [MA.1916])

注．この問題は次元を上げても意味があるが、12次元以上では確率論的には反例がある。(Larman+Rogers [M.1975]) （ii） 山辺の問題「コンパクトなリーマン多様体は計量 g を共形変形してスカラー曲率 S を一定にできるか」は既に解決されているが、その方程式は次のものであった：

$$4[(m-1)/(m-2)]\Delta f + S f = S_0 f^{(m+2)/(m-2)}$$

最近、Jerison-Lee [JDG.1987]は類似のことを CR-多様体について研究している。上の方程式については接触多様体で考察することが自然と思われるので、その FORMULATIONについて述べる。

接触リーマン構造は、strongly pseudo-convex CR-構造から P の積分可能条件を除いたものに対応しているから、まず適当に接続を定めなければならない。 CR-構造での田中接続を次のように拡張する。

$$ {}^*\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \eta_j \phi^i_k - \nabla_j \xi^i \eta_k + \xi^i \nabla_j \eta_k $$

${}^*\nabla$ は g、ξ、η を平行場にし、${}^*\nabla\phi = 0$ は P の積分可能条件と同値である。 ${}^*\nabla$ を拡張された Tanaka-Webster 接続と呼ぶ。

この接続の torsionのノルムの二乗の積分は、最近 m=3のとき Chern-Hamilton によって調べられている。

${}^*\nabla$ のリッチ曲率テンソル ${}^*R_{ij}$ を g^{ij} で縮約したものとして、Tanaka-Webster スカラー曲率 ${}^*S$ が定められる。実質的には

$$ {}^*S = S - R_{ij}\xi^i\xi^j + 2(m-1) $$

である。（M、η、g）において正値関数 σ を用いて $\tilde{\eta} = \sigma\eta$ とし

$$ (\phi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (\tilde{\phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}) $$

を自然に定めたものを接触リーマン構造の gauge変換という。

$\Delta_P f = (g^{ij} - \xi^i\xi^j)\nabla_i\nabla_j f$ と定めれば

$$ \sigma\,{}^*\tilde{S} = {}^*S - (\mu/u)\,\Delta_P u, \qquad \sigma = u^{2/n},\ \mu = 4(n+1)/n $$

$$ -\mu\tilde{\Delta}_P\tilde{f} + {}^*\tilde{S}\,\tilde{f} = u^{1-p}\,(-\mu\Delta_P f + {}^*S\, f), $$

$$ P = 2+2/n, \quad \tilde{f} = f/u, \quad m=2n+1 $$

定理C．コンパクト接触リーマン多様体（M、η、g）において、次で定義される $\lambda_{(\eta,g)}$ は接触リーマン構造の gauge invariantである：

$$ \lambda_{(\eta,g)} = \inf\{\int(\mu\|df\|_P^2 + {}^*Sf^2)dM \ ;\ f \ge 0,\ \int f^p dM = 1\} $$

$F_{(\eta)}$ と $F_{(\eta,g)}$ を次のように定義する：

$$ F_{(\eta)}(g,f) = \int(\mu\|df\|_P^2 + {}^*Sf^2)dM, \qquad F_{(\eta,g)}(f) = F_{(\eta)}(g,f) $$

$$ g：\text{associated metric}, \quad f：f \ge 0, \quad \int f^p dM = 1 $$

これらの積分の critical point の条件、安定性などについて、特に、球面の標準的接触構造の場合について、最近の結果について説明する。

3次元多様体上のnon-singular flowとlifting property

東京電機大学 理工学部
田村一郎

閉じた3次元多様体上のnon-singular flowとして誰でもすぐ思いうかべるのが3次元球面上のHopf flow, すなわち $S^3=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 ; |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ として

$$\phi_t((z_1,z_2))=(e^{it}z_1, e^{it}z_2)$$

によって与えられるflowである。この場合すべての軌道は閉軌道であるが, 1950年H.Seifertはこのflowをperturbしてえられるflowにはつねに少くとも一つの閉軌道があることを示し, その論文で S^3 のnon-singular flowはすべて閉軌道をもつかどうかということはまだ知られていないと述べている。以後, この閉軌道の存在問題はSeifert予想とよばれている。軌道を一つの葉とすることにより, S^3 のnon-singular flowは S^3 の余次元2の葉層構造を定めるが, Seifert予想はこの場合, S^3 の余次元2葉層構造にはつねにコンパクトな葉があるか, ということになる。これは葉層構造論でも極めて基本的な問題である。

このSeifert予想に関しては, 1971年P.Schweitzerによって C^1 級flowについては反例があることが示された。また, 1985年のA.M.S.のBull.にはJ. Harrisonによる C^2 級の反例が報じられているが, これのフルペーパーはまだ最終的なものにはなっていないように思われる。

Seifert予想を肯定的な面から論ずる難しさは, 3次元多様体におけるflowの多様性をどのようにしてとらえうるかということである。このための一つの方策としてflowに横断的な面をつくり, それによってflowを制御しようということが考えられる。

この横断面構成を可能にするための一つの条件がlifting propertyであって、これによってflowをファイバー・バンドルの拡張としてあつかうことが出来る。それならば、いつnon-singular flowがlifting propertyをもちうるかが次の問題となるが、これに関してはflowがminimalならばそのflowがlifting propertyを持つことがいえる。この証明には、lifting propertyをもたないflowについてはhyperbolicityに類似な性質があらわれるということと、minimalなflowではこのことから矛盾が出るという論法が用いられる。

以上のことによって、Seifert予想を肯定的に解決することが可能になる。

(1987年7月8日)

Jones index 理論 と エルゴード理論

九州大学 教養部
幸崎秀樹

1983年に V. Jones は II_1-factor の index 理論を発表した。II_1-factor M 及び その subfactor N が与えられた時、作用素環論的な比が Jones index $[M:N]$ として定義される。index の値が 4以上の任意の実数 ($+\infty$ を含む) か $4\cos^2\frac{\pi}{n}$, $n=3,4,\cdots$, であり、しかも この値を とる $M \supseteq N$ の実例が存在するというのが Jones の結果である。$N \subseteq M$ より canonical に II_1-factor の extension $M \subseteq M_1$ が構成され、これを繰り返す事により II_1-factor の tower $N \subseteq M \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ が構成される。この時、projection の列 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ で 次の関係式を満たすものが得られる。

$$\begin{cases} e_i e_j = e_j e_i & |i-j| \geqq 2 \\ e_i e_{i\pm 1} e_i = [M:N]^{-1} e_i \end{cases}$$

この projection の列の解析が Jones 理論の中心である。似た構造が他の分野 (Braid 群、Hecke 環、Potts model 等) にも表われるので 作用素環論 と これらの分野の 関連についても 活発に研究が進められている。中でも 作用素環論 の研究から 生まれた knot の新しい不変量 (Jones polynomial) は 特記に値する。作用素環論自体としても index 理論は 本質的である。(まだ完成には程遠いが) factor 自体の 構造は 多くの 人々の 努力で 解明されて来たが、その中に subfactor が どのように入っているか という問題は むずかしいが 重要な 研究課題 である。index 理論は subfactor の分類 の 為には 不可欠 であると 思われる。

講演者の研究により index 理論は II_1 とは限らない（つまり trace を持つとは限らない）一般の factor に対しても展開される事が示された。 II_1 でない事から生じる困難は富田竹崎理論の spatial 版（Connes の spatial theory）により解決される。先に書いたように subfactor の具体的実例及びその時の index の計算が重要である。 factor の実例の構成の為にはエルゴード理論が強力である（今の所エルゴード理論からは構成できない factor が存在するかどうかは open problem である。）ので subfactor の構成の際もエルゴード理論が役立つ事が当然予想される。

談話会では まず factor の構成の為に エルゴード理論が どのように使われるかを説明する。次に エルゴード理論に基づいて（II_1 とは限らない）subfactor がどのように構成されるか という問題及び これに関係した話題について説明する。

Conformal Field Theory / $\mathbb{Z}$

(東大理 上野健爾
談話会 9/9 in 北大) 中村郁記

M. Sato

$$V = \mathbb{C}((\zeta)) = \text{形式的 Laurent 級数の商体} = \left\{ \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu \cdot m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup$$

$$\mathbb{C}[[\zeta]] = \quad 〃 \quad \text{級数全体}$$

$$F^m V = \left\{ \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu \,;\, a_\nu \in \mathbb{C} \right\} \supset F^{m+1} V \supset F^{m+2} V \cdots$$

$$F^0 V = \mathbb{C}[[\zeta]].$$

Def. topology on V

fund. nbd. system of $0 \in V$

$$= \{ F^m V \,;\, m \in \mathbb{Z} \}$$

Thus
V: linear top. vector-space.

UGM = universal grass. manif.

$$\overset{\text{def}}{=} \left\{ U \subset V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{i) } U \text{ closed vector subspace} \\ \text{ii) } U \hookrightarrow V \longrightarrow V/F^0 V \\ \qquad \sum a_\nu \zeta^\nu \longmapsto \sum_{\nu<0} a_\nu \zeta^\nu \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ker, Coker} \\ \text{ともに finite dim.} \end{array} \right\}$$

Maya diagram
$$F^m V / F^{m+1} V = \mathbb{C}[\zeta^m]$$

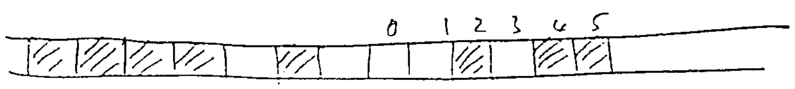
$$F^m U := U \cap F^m V, \quad F^m U / F^{m+1} U \subset F^m V / F^{m+1} V$$

$$\dim F^m U / F^{m+1} U \leqq 1.$$

$M(U)$ = Maya diagram ass. with U

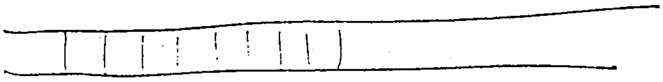
$$= \text{Maya diag. of } \{ m \in \mathbb{Z} \,;\, F^m U / F^{m+1} U = \mathbb{C} \}$$

単 $m \in M(U)$,
m-th
black block



$U \in UGM$

$\mapsto M(U)$ (2) の イミ, 7 M(U) で言った)



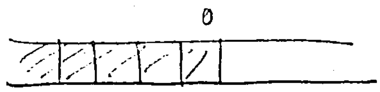
$\exists\, m_0 < m_\infty$

s.t. $\quad m_\infty \leq \forall m \quad \text{block}_m = \square$

$\quad m_0 \geq m \quad \text{block}_m = \blacksquare$

$\chi(U) = \text{Charge}(U) \left(= \overset{\text{or}}{\text{index}}\, U\right) = \dim \ker - \dim \operatorname{Coker}$

Fermion の状態



基底状態

(Pauli の排他律 より 1つの state には 1つの fermion しかいない

それは励起状態に対応.

$UGM = \varprojlim UGM^n$ として complex mfd の structure を入れる

$T_{[U]}\, UGM \cong \operatorname{Hom}_{\text{cont.}}(U, V/U)$

$\operatorname{End} V = \left\{ f : V \to V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{homom.}\ \exists \ell\ \text{st} \\ \text{for}\ \forall m \in \mathbb{Z},\ f(F^m V) \subset F^{m+\ell} V \end{array} \right\}$

$\operatorname{End} V \ni \forall f \longrightarrow \bar{f} \in \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(U, V/U)$

$$z = \frac{1}{\zeta} ,$$

$$\mathcal{D}_z = \mathbb{C}[z, z^{-1}]\left[\frac{d}{dz}\right] \qquad V = \mathbb{C}((z^{-1}))$$

$$\cup$$

$$P$$

$$\mathcal{D}_z \subset \operatorname{End} V$$

$\mathcal{D}_z$ は UGM の complex analytic vector field を induce.

$$\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} = \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \ni \mu, \qquad e^{\mu_i} = \zeta^{\mu+\frac{1}{2}}$$

V の 底.

§ UGM の Plücker embedding.

$[U] \in$ UGM,

U charge p.

basis $N \ll 0$, e^{ν} $\nu \leq N$.

$$e^{N_1} e^{N_2} \ldots e^{N}$$

$$e^{\mu(p-\frac{1}{2})} \wedge e^{\mu(p-\frac{3}{2})} \wedge \quad \wedge e^{\mu(n)} \wedge \cdots \cdots$$

但し $n \ll 0$, $\mu(n) = n$

$$\mathfrak{F}_p = \prod_{\substack{\text{def} \\ \mu.\ \text{csabare}}} \mathbb{C}\, e^{\mu(p-\frac{1}{2})} \wedge e^{\mu(p-\frac{3}{2})} \wedge \quad \cdots$$

$$UGM \hookrightarrow \mathbb{P}(\Xi) \quad , \quad \Xi = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \Xi_p$$

: fermion の Fock space.

生成 $\bar{\psi}_\mu(x) = e^{-\mu} \wedge x \qquad x \in \Xi$

消滅 $\psi_\mu(x) = e^{\mu} \lrcorner\, x$

x の中の e_μ を落とす 適当に

$$[\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = \psi_\mu \psi_\nu + \psi_\nu \psi_\mu = 0$$

$$[\bar{\psi}_\mu, \bar{\psi}_\nu]_+ = 0$$

$$[\psi_\mu, \bar{\psi}_\nu]_+ = \delta_{\mu+\nu, 0}$$

$$\psi(z) = \sum \psi_\mu z^{-\mu-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\psi}(z) = \sum \bar{\psi}_\mu z^{-\mu-\frac{1}{2}}$$

$$[\mathcal{D}_z, \mathcal{D}_z] \subset \mathcal{D}_z$$

右に関して について.

$p = id$ の時

$(\wedge\, id)(f_1 \wedge \cdots\cdots)$

$= \infty (f_1 \wedge \cdots\cdots)$

発散が生ずる

$U \subset V \qquad \overset{d}{\wedge} U \subset \overset{d}{\wedge} V$

$p \in \mathrm{End}\, V$

$(\overset{d}{\wedge} p)(f_1 \wedge \cdots \wedge f_d)$

$:= p(f_1) \wedge \cdots \wedge f_d$

$+ f_1 \wedge p(f_2) \wedge \cdots$

$+ f_1 \wedge \cdots \wedge p(f_d))$

$\Phi(p) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ を定義できる

for $p \in \mathcal{D}_z$.

$$\Phi(p) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{z=\infty} :\left(P_z \psi(z)\right) \bar{\psi}(z): \, dz$$

$$:\psi_\mu \bar{\psi}_\nu: \quad = \begin{cases} \psi_\mu \bar{\psi}_\nu & \mu < 0,\ \nu > 0 \\ -\bar{\psi}_\nu \psi_\mu & \mu > 0,\ \nu < 0 \\ \psi_\mu \bar{\psi}_\nu & \text{それ以外} \end{cases}$$

$\mu > 0$

$$:\psi_\mu \bar{\psi}_{-\mu}: \quad = \quad -\bar{\psi}_{-\mu} \psi_\mu \qquad\qquad \psi_\mu \bar{\psi}_{-\mu} + \bar{\psi}_{-\mu} \psi_\mu = id$$

id の消去 (発散の処理)

$$\Phi(id)\big|_{\mathcal{F}_p} = -p$$

$p \longmapsto \Phi(p)$

は Lie alg homom とならない

$$\Phi([P, Q]) = [\Phi(P), \Phi(Q)] + \underbrace{c(P, Q)}_{\text{anomaly term}}$$

$$\in H^2(\mathcal{D}_z, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

物理で重要な量

current. $J_n = -\Phi(z^n)$

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}$$

Energy momentum tensor

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2},$$

$$L_n = \Phi\left(z^n\left(z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}(n+1)\right)\right)$$

$$[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}$$

Virasoro algebra

$$\mathcal{F} \xrightarrow[B]{\sim} \mathcal{H}$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{H})$$

B = Bosonization

$$\mathcal{F} \qquad \mathcal{H} = \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots, t_n \cdots]] \otimes \mathbb{C}[e^{t_0}, e^{-t_0}]$$

$$\cup\!\!\!\!\!\shortmid$$

$$|\Psi\rangle$$

$$B|\Psi\rangle := \sum e^{t_0} \langle n| \exp \sum_{m=1}^{\infty} J_m t_m \,|\Psi\rangle$$

$a_m = B J_m B^{-1}$: operator on $\mathcal{H}$

$$a_m = \frac{\partial}{\partial t_m} \qquad m \geqslant 0$$

$$a_{-m} = m t_m \qquad m > 0$$

$$\psi(z) = \exp\left(\sum t_n z^n\right) e^{t_0} \exp\left(\log z \frac{\partial}{\partial t_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \frac{\partial}{\partial t_n}\right)$$

$\mathbb{Z}$ 上. $\exp \Sigma \cdots$ が $\frac{1}{n!}$ を含むので $\mathcal{H}$ が問題

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \underset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[u, u^{-1}] \otimes \mathbb{Z}[x_1\, x_2\, x_3 \cdots]^{\wedge}$$

universal Witt ring

where $$n t_n = \sum_{d|n} d \cdot x_d^{n/d}$$

とすれば 数学に解消する.

$$e^{\sum t_n z^n} = e^{\sum \frac{n t_n}{n} z^n}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x_m z^m)^{-1}$$

$$\exp\left(+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n} \frac{\partial}{\partial t_n}\right) f(t_1, t_2 \cdots) = f(t_1 + \frac{1}{n z^n} \cdots \quad)$$

$$t_n \to t_n - \frac{1}{n z^n}$$

$$\exp\left(\cdot \sum \frac{z^{-n}}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) f(x) = f(x \pm [\tfrac{1}{z}])$$

$$[\tfrac{1}{z}] = (\tfrac{1}{z}, 0, 0 \ldots 0)$$

Witt ring の sum.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{\mathbb{Z}} \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "\text{defined }/\mathbb{Z}"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "w^*"] \\ & \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

$\psi(z)$ $\quad$ J_n $\quad$ $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$

$\overline{\psi}(z)$ $\quad$ の operator となる.

$J(z)$

τ関数 $/\mathbb{Z}$ or $/\mathbb{Q}_p$

theta constants $/\mathbb{Z}$

(see Chai, Faltings)

問 Witten complex oriented cobordism ring elliptic genus との関連は？

問 Fuchs (Russian ∞ dim cohomology of Lie algebras)

Grass manif. ↪ ∞ dim Lie alg.

Grassman alg ⊋ cobordism ring operators

とすれば natural な Grassman alg の表現を cobordism ring に入れ(少し modifyして)るのは疑問である。

Comments by T. Yoshida

$\mathbb{Z}[u,u^{-1}] \otimes \underbrace{\mathbb{Z}[x_1 x_2 x_3 \cdots]}\hat{}$

は Burnside ring of inf cyclic gr $\mathbb{Z}$.

問. complex cobordism ring oriented $\underset{?}{\cong} \mathbb{Z}[[x_1\ x_2\ x_3 \cdots]]$

(if so, or if not even) what the meaning of x_i ?

For instance over $\mathbb{C}$, (Sato)

$\mathbb{C}[[t_1\ t_2\ t_3 \cdots]]$ in KP equation, t_i = parameter of time evolution

star-triangle relation

三輪哲二（京大・数理研）

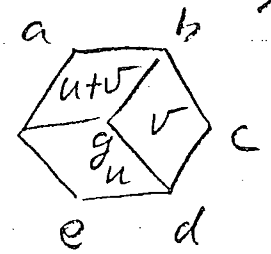
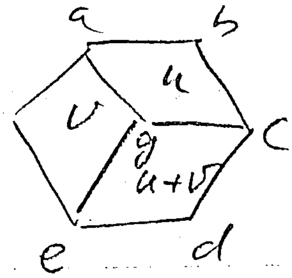
$\mathcal{S}$: a set $\quad \mathcal{S} \ni a$: a state

$$W : \mathbb{C} \times \mathcal{S}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, a, b, c, d) \mapsto \begin{matrix} a & & b \\ & \boxed{u} & \\ d & & c \end{matrix}$$

W が star-triangle relation の解

$\Longleftrightarrow$

$$\sum_g f$$  $$= \sum_g f$$ 

for $\forall a, b, c, d, e, f$

U : face operator $\mathrm{End}(V \times V \times V)$

$$\dim V = \#(\mathcal{S})$$

$$U^{abc}_{a'b'c'} = \delta_{aa'}\delta_{cc'} \begin{matrix} a & & b \\ & \square & \\ b' & & c \end{matrix}$$

$$U_i \in \mathrm{End}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m+2})$$

$V_i \times V_{i+1} \times V_{i+2}$ に働く

$$U_i(u) U_j(v) = U_j(v) U_i(u) \qquad |i-j| \geqslant 2$$

$$U_{i+1}(u) U_i(u+v) U_{i+1}(v) = U_i(v) U_{i+1}(u+v) U_i(u)$$

Young図形の増大列

n, ℓ : positive integer, $\geqslant 2$

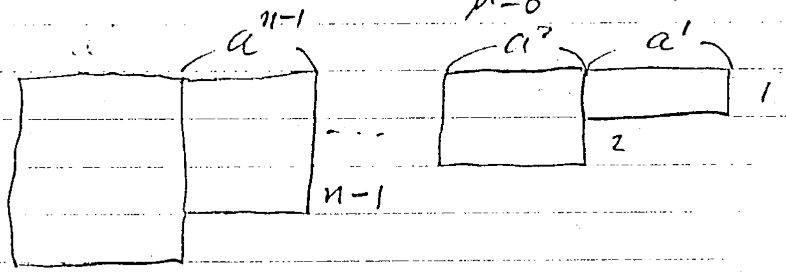
$P_+(n;\ell)$: Young図形の同値類

$(f_0, \cdots, f_{n-1}) \longleftrightarrow$ $\boxed{f_0}$ $\cdots$ $\boxed{f_{n-1}}$

1) 深さ n 以下
2) $f_0 - f_{n-1} \leqslant \ell$
3) $(f_0, \cdots, f_{n-1}) \sim (f_0 + 1, \cdots, f_{n-1})$

$$a \in \mathcal{S} \qquad a = \sum_{\mu=0}^{n-1} a^\mu \Lambda_\mu , \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} a^\mu = \ell$$

$$a^\mu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$



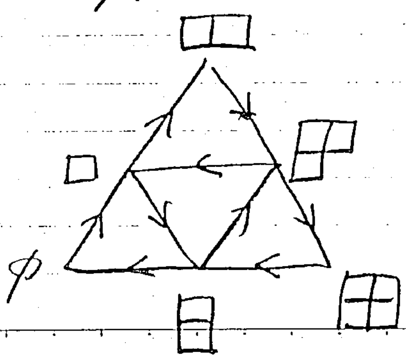
$(a, b) \in \mathcal{S}$: admissible $\qquad a \xrightarrow{\mu} b$

$$\Leftrightarrow \quad b = a + \hat{\mu} \qquad \mu = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\hat{\mu} = (0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \mu}}{1}, \cdots, 0)$$

$$= \Lambda_{\mu+1} - \Lambda_\mu$$

例 $n = 3$, $\ell = 2$



$$\mathfrak{h}^* = \bar{\mathfrak{h}}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta$$

$$\bar{\mathfrak{h}}^* = \left\{ \sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu \varepsilon_\mu \;\middle|\; \sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu = 0 \right\}$$

内積

$$\langle \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad \bar{\mathfrak{h}}^* \perp (\mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta)$$

$$(\Lambda_0, \Lambda_0) = (\delta, \delta) = 0, \quad (\Lambda_0, \delta) = 1$$

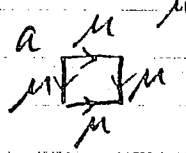
$$\rho = \sum_{\mu=0}^{n-1} \Lambda_\mu \qquad a_{\mu\nu} = \langle a+\rho, \varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu \rangle$$

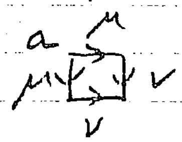
$\boxed{A^{(1)}_{n-1} \text{ family}}$

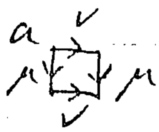
$$\theta_1(u,p) = 2|p|^{1/8} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2p^k \cos 2u + p^{2k})(1-p^k)$$

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right)$$

$a \in \sum_{\mu=0}^{n-1} \mathbb{C}\Lambda_\mu$ に対して


$$= \frac{[u+1]}{[1]}$$


$$= \frac{[a_{\mu\nu} - u]}{[a_{\mu\nu}]}$$


$$= \frac{[u]\,[a_{\mu\nu}+1]}{[1]\;\,[a_{\mu\nu}]}$$

$(\mu \neq \nu)$

restriction $\quad a \in \mathcal{S} = P_+(n; l)$

$$L = n + l$$

$\boxed{\text{fusion}}$ $N \geqq 1$

(a, b) : N admissible

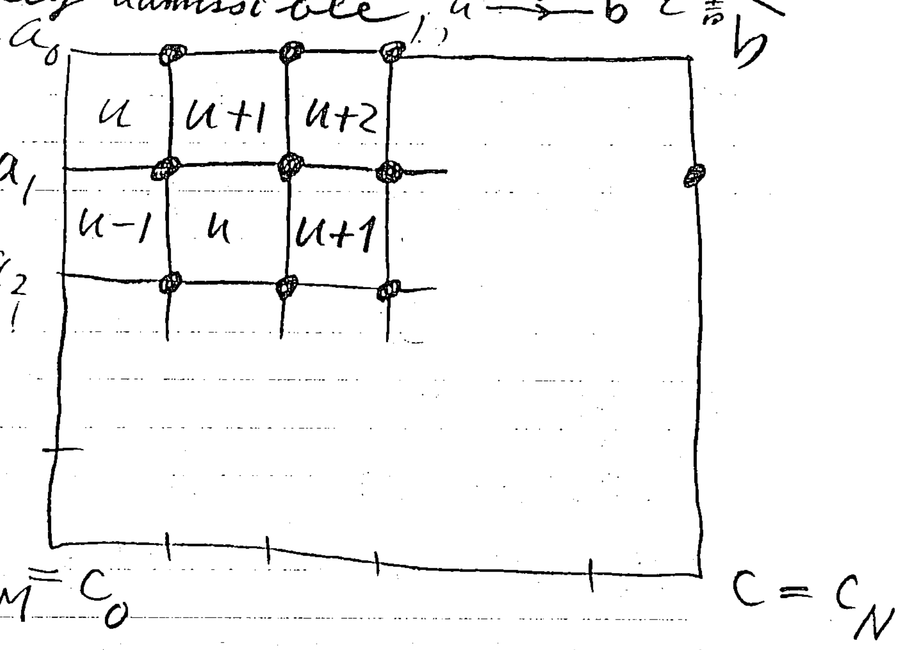
(1) $b = a + \hat{\mu}_1 + \cdots + \hat{\mu}_N$

(2) ${}^\forall j = 0, 1, \cdots, N$, ${}^\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$

$$a + \hat{\mu}_{\sigma(1)} + \cdots + \hat{\mu}_{\sigma(j)} \in P_+(n, \ell)$$

(1)だけの時 N weakly admissible, $a \xrightarrow{N} b$ と書く

$$\begin{array}{ccc} a & N & b \\ M & \boxed{u} & M \\ d & N & c \end{array} =$$



: 和の意味

$(a_0, a_1, \cdots, a_M)$ $a_{i+1} = a_i + \hat{\mu}_i$

$(c_0, c_1, \cdots, c_N)$ $c_{i+1} = c_i + \hat{\nu}_i$

の選び方に依らず, STR の解

restriction $a \in \mathcal{S} = P_+(n; \ell)$
$L = n + \ell$

さらに $a \xrightarrow{N} b$ は N admissible に限る。

才1の注意

$P=0$ とすると STR の解は $x=e^{2\pi i u/L}$ の多項式に reduce する。

$$U_i(u) = V_i x^N + \cdots$$

この時 V_i は braid 群の表現を与える。

$$B_m:\quad \begin{aligned} &V_i V_j = V_j V_i \qquad |i-j| \geq 2 \\ &V_{i+1} V_i V_{i+1} = V_i V_{i+1} V_i \end{aligned}$$

特に $N=1$ として

$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m+2}$ の element

$(a_1, a_2, \cdots, a_{m+2})$ で

(1) $a_1 = \phi$

(2) (a_i, a_{i+1}) : admissible

を満たすものたちで張られた空間 $\mathcal{V}_m$

既約な表現空間となり、

$$\begin{tikzcd} B_m \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{End}(\mathcal{V}_m) \\ & \mathcal{I}_m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(V_i - 1)(V_i + q) = 0$$
$$q = e^{2\pi i/L}$$

と factor して Iwahori algebra の既約表現を与える

この表現は別の所で現われる。

(1) Wenzl : C^*環

II_1 factor − subfactor の構成

(2) Tsuchiya − Kanie : conformal field theory

$A_1^{(1)}$ symmetry を持つ conformal field theory

における $m+2$ 点相関函数の

monodromy 表現.

Local state probability

$N=1$ の restricted model.

$\mathcal{L}$: 2次元正方格子 $\quad i=(i_1, i_2)\in\mathcal{L}$

$\mathcal{C}$: a configuration $\quad (a_i)_{i\in\mathcal{L}} \quad a_i\in\mathcal{S}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{S} = P_+(n;l)$

(1) 制限条件 $\quad (a_i,\ a_{i+(0,1)})$

$\qquad\qquad\qquad (a_i,\ a_{i+(1,0)})$ は admissible

(2) 境界条件 $\quad |i|\gg 0$ の時

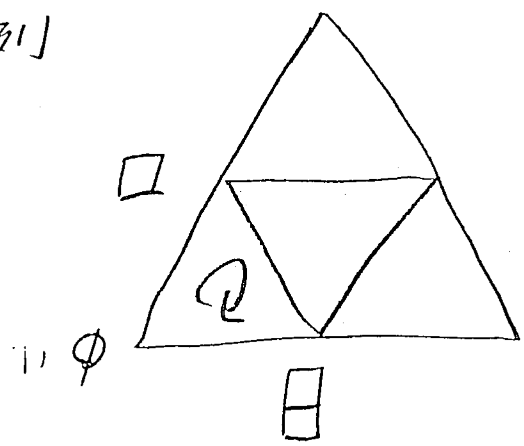
$$a_i = b_{i_1+i_2}$$

$$b_j = \xi + \Lambda_{\nu+j-1} \qquad \xi\in P_+(n;l-1)$$

$$\Lambda_\nu \in P_+(n;1)$$

$$b_j \in P_+(n;l)$$

例



$b_{3j} = \phi$

$b_{1+3j} = \square$

$b_{2+3j} = \boxminus$

$$P(a) = \frac{\sum_c \delta_{a_1 a} \prod_{face} \boxed{u}}{\sum_e \prod_{face} \boxed{u}}$$

は、パラメタ (u, p) の領域 $0<p<1, -1<u<0$ で well-defined になり、答は u に依らない。

$\boxed{A^{(1)}_{n-1} \text{ の指標の分解}}$

$$A_{n-1} = sl(n, \mathbb{C}) \quad , \quad \langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\, XY$$

$$X^a : \text{o.n.b.} \qquad \langle X^a, X^b \rangle = \delta_{ab}$$

affine Lie algebra $\quad [X^a, X^b] = f^{ab}_c X^c$

$$[X^a_m, X^b_n] = f^{ab}_c X^c_{m+n} + m \langle X^a, X^b \rangle \delta_{m+n,0}\, \ell$$

$$[X^a_m, \ell] = 0$$

$a \in P_+(n; \ell)$ に対して

$A^{(1)}_{n-1}$ の既約表現 $L(a)$ が決まる。

$L(a) \ni |vac\rangle$

$$X^a_m |vac\rangle = 0 \qquad m > 0 \text{ または } m=0 \text{ で } X^a \text{：上三角}$$

$$h_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \end{array} \in sl(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow A^{(1)}_{n-1} \text{ に対して}$$

$$h_i |vac\rangle = a^i |vac\rangle$$

$$\ell |vac\rangle = \sum^{n-1} a^i |vac\rangle$$

この既約表現の指標は，n変数

$(z_1, \cdots, z_{n-1}, q) \in (\mathbb{C}^\times)^{n-1} \times \mathbb{C}_{|q|<1}$

の函数。それを $\chi_a(z_1, \cdots, z_{n-1}, q)$ と書く。

Kac-Peterson ('84 Adv. in Math.)

χ_a は q を elliptic nome とするテータ函数の比の形に書ける。

$$A^{(1)}_{n-1} \oplus A^{(1)}_{n-1} \supset \Delta(A^{(1)}_{n-1}) \text{ : diagonal}$$

$$\xi \qquad \eta = \Lambda_\nu$$

$L(\xi) \times L(\eta)$ を $\Delta(A^{(1)}_{n-1})$ の既約表現に分解すると，対応して指標の恒等式

$$\chi_\xi(z_1, \cdots, z_{n-1}; q)\chi_\eta(z_1, \cdots, z_{n-1}; q)$$
$$= \sum_a b_{\xi\eta a}(q)\chi_a(z_1, \cdots, z_{n-1}; q)$$

が得られる。この時 $(p = e^{-\varepsilon},\ x = e^{-4\pi^2/L\varepsilon})$

$$P_1(a) = \frac{b_{\xi\eta a}(x^n)\chi_a(x, \cdots, x; x^n)}{\chi_\xi(x, \cdots, x; x^n)\chi_\eta(x, \cdots, x; x^n)}$$

第2の注意

Virasoro 代数 Vir

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}\, c$$

$$[L_m, c] = 0$$

Vir の表現加群 V であって

$$V_h = \{ v \in V \mid L_0 v = h v \}$$

が $\forall h$ に対して有限次元のものに対して

指標を $\mathrm{tr}_V\, q^{L_0 - c/24}$ で定義する。

$b_{\xi\eta a}(q)$ は Virasoro 代数の指標となり、

$$q = e^{2\pi i \tau} \longrightarrow \tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau}$$

に対して線型空間 $\sum_{\xi,\eta,a} \mathbb{C}\, b_{\xi\eta a}(q)$ は

invariant.

$p=0$ とした model で周の長さ n

cylindrical な lattice を考える。軸方向に

$$(i_1, i_2+m') = (i_1+m'', i_2)$$

という同一視を行なってできる有限格子を

$$\mathcal{L}(\tau) \qquad \tau = \sqrt{-1}\ \frac{m'+\sqrt{-1}\,m''}{n}$$

と書く。

Cardy ('86) の principle

$$Z_{\mathcal{L}(\tau)} = \prod_{e} \sum_{face} \square$$

$$\log Z_{\mathcal{L}(\tau)} = (-\log f)\, m' n + Z_f(\tau) + \cdots$$

この時 $Z_f(\tau) = \dfrac{1}{2} \sum_{\xi,\eta,a} b_{\xi\eta a}(\varrho)\, b_{\xi\eta a}(\varrho^*)$

ϱ^* は ϱ の複素共役.

$Z_f(\tau)$ は modular invariant.

「Knotting submanifolds locally」のアブストラクト

阪市大　増田幹也

$L^n \subset M^{n+2}$　codim. 2 の submanifold

L, M 共に connected, closed, oriented, smooth manifold とする。

この講演では次の問題を考える。

問題　L を local に knot させると，L の M への新しい埋めこみが得られるか？

これをもう少し正確に定式化する。

L の勝手な点 x を取り，x の M における disk 近傍を D_M^{n+2} とする。$D_M^{n+2} \cap L = D_L^n$ は x の L における disk 近傍である。対 (D_M^{n+2}, D_L^n) は standard な対 (D^{n+2}, D^n) と diffeo. である。

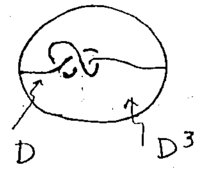
さて，(D^{n+2}, D) を次のようなものとする。

(1)　$D \cong D^n$ diffeo.

(2)　$\partial(D^{n+2}, D) = \partial(D^{n+2}, D^n)$　∂ は境界を表わす。

(3)　D は D^{n+2} の中で knot している

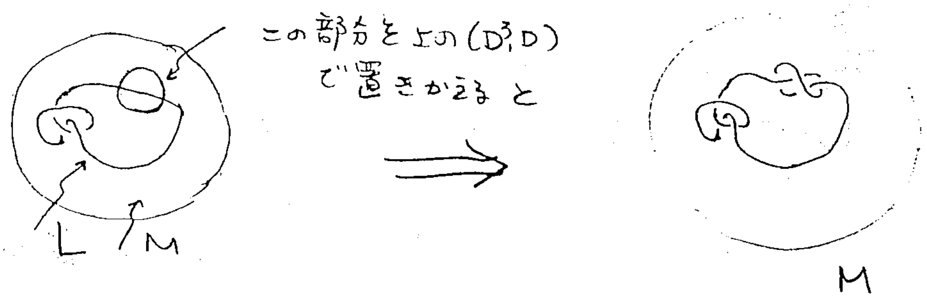
（$n=1$ の例



）

L を local に knot させるとは (D_M^{n+2}, D_L^n) を上のような (D^{n+2}, D) で置きかえることである。

例



この操作では M, L は abstract には変わっていないが L の埋めこまれ方は異なっているかも知れない。

$$(D^{n+2}, D) \cup (D^{n+2}, D^n) = (S^{n+2}, K) \quad \text{とおく}$$

ここで $\cup$ は境界でのはり合わせ。$K = D \cup D^n$ は S^n と diffeo. 故 (S^{n+2}, K) は n-knot を定める。上の (D^{n+2}_M, D^n_L) の部分を (D^{n+2}, D) で置き換える操作は (M, L) と (S^{n+2}, K) を連結和することと同じであることに注意する。以上の考察の下に、次の集合を考える

$$I(M,L) = \{ (S^{n+2}, K) \in \mathcal{K}_n \mid (M,L) \# (S^{n+2}, K) \cong (M,L) \}$$

ここで $\mathcal{K}_n$ は n-knot 全体の isotopy classes の集合で連結和により abelian monoid になる。$I(M,L)$ は $\mathcal{K}_n$ の submonoid になる。この $I(M,L)$ が L を local に knot して、新しい埋め込みがどのぐらい得られるかを記述していると考えられる。

$I(M,L)$ の構造には、L の meridian の $H_1(M-L; \mathbb{Z})$ 又は $\pi_1(M-L)$ での order が関連していることがわかる。どうもその order だけで $I(M,L)$ は決まってしまうように思われる。

おおざっぱに言って、meridian の order (p とかく) が ∞, 1, $1 < p < \infty$ に応じて、次の3つの type が起こる。

Type 1. $I(M,L) = \{0\}$
Type 2. $I(M,L) = \mathcal{K}_n$
Type 3. $\{0\} \subsetneq I(M,L) \subsetneq \mathcal{K}_n$

Type 3 は generalized Smith conjecture の反例と関係がある。

特異ラグランジュ多様体について

1987. 10. 21

北大理 石川剛郎

1°) (M^{2n}, ω) をシンプレクティック多様体とする。M の部分多様体 L が $\omega/L = 0$ をみたすとき イソトロピック多様体という。n 次元イソトロピック多様体をラグランジュ多様体と呼ぶ。

例。B を n 次元多様体，T^*B を B の余接バンドルとする。T^*B には自然なシンプレクティック構造が入る；T^*B 上の 1-form α で，任意の B 上の 1-form $\beta : B \to T^*B$ に対し「$\beta^*\alpha = \beta$」となるものが 1 意的に存在する (canonical 1-form) そこで $\omega = d\alpha$ とおく。

ラグランジュ多様体の例としては closed 1-form $\beta : B \to T^*B$ の像 $\beta(B)$ がある。これは projection $\pi : T^*B \to B$ に対し特異性をもたないが，一般のラグランジュ多様体 $L \subset T^*B$ に対し $\pi/L : L \to B$ は特異点をもつ（ラグランジュ特異点）。

2°) 特異ラグランジュ多様体の定義はまだ定っていないが，次のような定義のしかたがある。(M^{2n}, ω) シンプレクティック多様体の部分集合 X が ラグランジュ・バラィティー とは

(1番目の定義) X は n 次元 involutive variety

(2 〃) X は stratification をもち，その各 stratum が isotropic $\dim X = n$

(3 〃) 任意の C^∞ map $f : N \to M$，$f(N) \subset X$ に対し $f^*\omega = 0$ かつ $\dim X = n$.

このような対象は，線型偏微分方程式で holonomic なものの characteristic variety として，あるいは Lagrange 多様体の簡約，あるいは Lagrange map の特異点のある場合の像として現われる。

2°) $f: N, x_0 \to (T^*B, \omega)$ が isotropic map-germ (Lagrangian map-germ)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f^*\omega = 0$ (かつ $\dim N = \dim B$)

$f: N, x_0 \to (T^*B, \omega)$, $g: N', y_0 \to (T^*B', \omega')$ を2つの Lagrangian map-germ とするとき f と g が equivalent とは 図式

$$\begin{array}{ccccc} N, x_0 & \xrightarrow{f} & T^*B, f(x_0) & \xrightarrow{\pi} & B, \pi f(x_0) \\ \wr\!\!\downarrow & \circlearrowleft & \wr\!\!\downarrow \tau & \circlearrowleft & \downarrow\!\wr \\ N', y_0 & \xrightarrow{g} & T^*B', g(y_0) & \xrightarrow{\pi'} & B', \pi' g(x_0) \end{array}$$

を可換にするたて向きの diffeoms で、$\tau^*\omega' = \omega$ をみたすものが存在するときにいう。

f が Lagrangian stable とは、f を少し Lagrange map の中で摂動しても f_{x_0} と同値な芽を消すことができないときにいう。

次の結果が知られている

Theorem (Arnold 1972)

$f: N, x_0 \to T^*B$ が Lagrange ~~stable~~ immersion germ とする
このとき、f: L-stable $\Longleftrightarrow$ f の generating family

$G: Y \to \mathbb{R}$ が $G/Y_{\pi\circ f(x_0)}$ の versal
$\quad\downarrow\pi$
$\quad B$

deformation

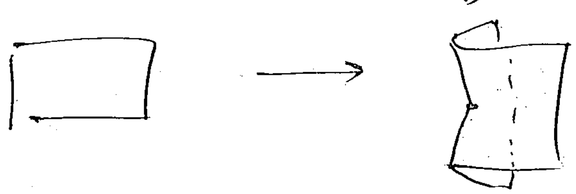
Theorem (Givental' 1986)

$f: \mathbb{R}^2, 0 \to T^*\mathbb{R}^2, 0$ を

$$f(x_1, x_2) = (q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(x_1, \frac{x_2^2}{2}, \frac{x_2^3}{3}, x_1 x_2\right)$$

とおくと、f は L-stable.

f or $f(\mathbb{R}^2)$ を $\underbrace{\text{open Whitney umbrella}}_{W_2(5)}$ という



今回は L-stable map $f: \mathbb{R}^{2n}, 0 \to T^*\mathbb{R}^{2n}, 0$ $f = W_{2n}(4n+1)$ を構成し、kernel rank one の Lagrange (stable) map-germ は本質的にこれにつきることを示した。

以上

L^2コホモロジーと交叉コホモロジー

大沢健夫

(X, ds^2) を n 次元完備 Kähler 多様体とする。X 上の L^2 コホモロジーが de Rham 或は Dolbeault の意味の通常のコホモロジーに同型である為の条件を述べ、以下の場合に（次数の制限つきで）それが実現されることをいう。

1. 滑らかな境界をもつ擬凸領域とその上の Bergman type の計量
2. 射影的代数多様体の非特異部分とその上の Poincaré type の計量

更に後者において計量のとり方の自由度を考慮に入れるとより好都合な計量の存在が言える。

即ち、

定理　$\bar{X}$ を（$\mathbb{C}$ 上の）完備な射影的代数多様体，X をその非特異部分とせよ。このとき X 上の完備な Kähler 計量 ds^2 で次の二条件をみたすものが存在する．

1)　ds^2 の基本形式 ω の定めるコホモロジー類 $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ は $\bar{X}$ 上の Fubini-Study metric から導かれるものと一致する．

2)　$H_{(2)}(X) \cong IH(\bar{X})$，但し $H_{(2)}$，IH はそれぞれ（$\mathbb{C}$ 係数）L^2 コホモロジー，交叉コホモロジーを表す．

系．　$\dim IH^{2n-1}(\bar{X}) \equiv 0 \pmod 2$

Nets of conics and deformations of singularities

The discriminant of a net of conics is a cubic curve Δ in the plane Π parametrising the net. For Δ smooth, there are 3 isomorphism classes of corresponding nets: these are determined by the double covering $\tilde{\Delta}$ of Δ consisting of lines belonging to line-pairs of the net.

In the real case, the same is true but there are 4 topologically distinct types of double covering.

A map-germ $f_0 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, homogeneous of degree 2, determines a net. We seek to classify deformations to Σ^2, for f_0 as above. Such a deformation is obtained by adding to f_0 a linear map f_1 of rank 1, determining a line L in P^2 and a line Λ in Π. Then Λ determines a subpencil of the net, and the singularity has type $B_{r+2,s+2}$ if ~~the~~ L passes through base points of this pencil of multiplicities r, s (set r resp $s = 0$ if there is no base point), and C_{r-1} if L is a common tangent at a base point of multiplicity r.

By considering the number of connected components of the closures of the strata C_1, $B_{3,4}$ and $B'_{3,4}$ in the deformation, the 4 real types of net can be distinguished.

C. T. C. Wall

4/11/87

(アブストラクト)　　Sapporo. Nov. 11, 1987

2重正則有向グラフ　　甲南大理　伊藤昇

(v,k,λ) symmetric design はつぎの様にも定義される. まず次数 v の $(0,1)$ 行列 A で, $AA^t=(k-\lambda)I+J$, ここで t は転置, I, J はそれぞれ次数 v の単位行列, 全1行列をしめす, を満足するもの全部の集合を $\mathcal{A}(v,k,\lambda)$ とおく. $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(v,k,\lambda)$ について A_2 が A_1 と同値であるとは, 置換行列 P, Q が存在して $A_2=P^tA_1Q$ となることとする. これは同値関係で, 各同値類 D, … を symmetric design という (sd と略する)

Symmetric design は Steiner, Kummer, Sylvester, Hadamard 等によっても考察されているので, design という言葉以前に出現していることに注意したい. しかし一般論を作り上げようとしたのは 1950年代からであって, とくに Ryser (最近亡くなられた) を中心とする人達の結果が著しい: $k-\lambda=k^2-\lambda v$, $AA^t=A^tA$ 即ち A は正規行列, さらに $x^2=(k-\lambda)y^2+(-1)^{\frac{v-1}{2}}z^2$ が自明でない整数解を持つ 等の結果がある. 数年前に Lander がその后の成果をある程度まとめたものを出版したが, 一般論では進歩がない. ただし A の単因子形, A をその行ベクトル達が作る lattice の生成行列と見る, また code と考える などの方向を打出していると思える. もっともこれらのことは誰でも考えることとも思えるが, 若い人達に興味を持って頂きたいと思う. $v=111$, $k=11$, $\lambda=1$ 即ち位数10の射影平面はときどき話題になる. たとえば存在すれば, A の形では $(111!)^2$ もあることに注意したいし, また一般論に大きな影響を与える問題とも思う.

もし A の範囲を適当に制限したら一般論を推進する可能性が出て来るのではないか. これが話者の考えであって, またその制限として, $A+A^t+I$ も $(0,1)$ 行列というのを取り上げる. こうした時の $\mathcal{A}(v,k,\lambda)$ の部分集合を $\mathcal{B}(v,k,\lambda)$ とおく. $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(v,k,\lambda)$ について A_2 が A_1 と同値であるとは置換行列 P が存在して $A_2=P^tA_1Q$ となることとする. これは同値関係であって, 各同値類 $\mathcal{D}$, … を doubly regular asymmetric digraph (2重正則有向グラフ, drad と略) という. このとき $v \geq 2k+1$ でなければならないが, sd では $A\in\mathcal{A}(v,k,\lambda)$ なら $J-A\in\mathcal{A}(v,v-k,v-2k+\lambda)$ であり, sd の同値関係でも上手く対応しているので, 一般論としての制限にはなっていない. $\mathcal{D}$ についてはスペクトラムが考えられる. そして $A+A^t+I+N=J$ とすると N は対称行列で, あるグラフ

$N(\vartheta)$ グラフと呼ぶ、の（代表行列の）隣接行列と考えられる。$N(\vartheta)$ が empty のときだけは、以前から文献にある。それが Hadamard トーナメント（$v=2k+1$）の場合である。$N(\vartheta)$ が empty でなく、しかも connected でない場合として正則 Hadamard 行列（design）に対応する drad が特徴付けられる。この様にある程度の結果は得られつつあるが、問題山積で、若い人達に是非興味を持って頂きたいと思う。

対称空間の構造について

長野　正（上智大）

対称空間Mは各点xで点対称 s_x の与えられた多様体で，ここでは或リーマン計量をすべてのs_xが保つと仮定する．n次元ユークリッド空間は例であるが，以下Mは連結コンパクトとする．対称空間Mから対称空間Nへの滑らかな写像fが各点対称と可換なら（$f\circ s_x = s_{f(x)}\circ f$），fは準同型である（定義）．Mが連結なのでこれは全測地的と同等である．以下部分空間と言えば包含写像が準同型である対称空間を意味する．

点oに対しs_oの固定点集合（部分空間）$F(s_o, M) = \{x \in M;\ s_o(x) = x\}$の各連結成分$M^+$を極地と呼ぶ；xを通る極地を $M^+(x)$と記す．極地M^+の任意の点pでの直交補空間$M^-(p)$は一意的に存在する；$M^-(p)$は連結部分空間で定義によりそのpでの接空間はM^+の接空間の直交補空間である．M^+の点pの採り方に$M^-(p)$の同型類はよらない．M^-はMと同じ階数を持つ．極地はMと位相的に密接な関係にあり，$M^-(p)$の局所構造及び基本群はMのと深く関係する．Mは一つの対（M^+，$M^-(p)$）で完全に決まる．

例．ユニタリ群 $U(m)$ は $s_x(y) = xy^{-1}x$により対称空間，$M = U(m)$の部分空間である測地線の特性は $U(m)$の連結1次元部分群と合同な（自己同型群で互いに移れる）ことである．xが $F(s_1, M)$に入る ⇔ xは包合的（$x^2 = 1$）．このxの trace $Tr(x)$ が $n - 2r$ なら $M^+(x) \cong G_r(C^m)$:=［$\mathbb{C}^m$中のr次元部分空間の成す複素グラスマン多様体］，$0 \leqq r \leqq m$，である．その直交補空間は $M^-(x) \cong U(r) \times U(m-r)$．極地$G_r(C^m)$は $U(m)/(U(r) \times U(m-r))$ と書けるが，一般に原点oを停める自己同型の群の単位元を含む連結成分（今の場合 $U(m)$，正確には ad $U(m)$）が各極地に推移的に働く．

複素グラスマン多様体$G_r(C^m)$，$2r \leqq m$，の２点x,yの（算術的）距離 $d(x,y) := \dim x/(x\cap y)$を考える．W.L.Chow [Ann. of Math. 50(1949)]は，$r>1$の仮定の下に「全単射$f:G_r(C^m)\to G_r(C^m)$が距離 dを保つなら，fは正則または反正則変換である」ことを証明した．（$G_r(C^m)$の通常の位相に関する連続性をfに仮定しなかった．）証明のアイデアは鮮明で射影幾何学の基本定理を使う．

このChowの定理の一般化を試みる（但しfは滑めらかと仮定する）．先ず距離

を拡張する．単純な連結コンパクト対称空間Mの中の直径が最小の（包含関係に関し）極大な球をHelgason球（H球）と呼ぶ．Mの自己同型群は推移的に働くから任意の点に対しそれを通るH球が存在する．H球は合同を除き一意的である．Mの2点x，yの距離dがp以下だとはx，yをp個のH球の鎖（列）で結べることだと定義する；但しx=yならd(x,y) = 0と決める．それは上半連続である．そして M = $G_r(C^m)$のときChowの距離に一致する．この距離がMの幾何学的構造（成層分解 stratification）と密接に関係することを次に見よう．その成層分解はMを極地上の円盤束の離散和に分解するのである．

幾何学的構造の説明のためにMとして，典型的しかも基本的な例としてユニタリ群U(n)を採ろう．先ずU(1)は円である．これを{−1}とその余集合に分けると胞体分割が出来る．その余集合は1への最短測地線が一意的である点の全体と解釈できるのでCCL(1)と記そう（CCL(1) = the complement of the cut locus of 1）；U(1) = {−1} ⨿ CCL(1)．一般のU(n)の場合にも同様である．M中の点pへの最短測地線が一意的である点の全体をCCL(p, M)と記す；CCL(p, M)はMの開集合で円板と微分同相である．M = U(m)なら，ユニタリ群の極大円環体が対角行列全体 ≅ $U(1)^m$と同型だから，任意の点pは，その固有値 −1の重複度がrなら，極地 $M^+ \cong G_r(C^m)$の或点xへの最短測地線が一意的で CCL(x, M)∩$M^-(x)$に含まれる．詳しくみると，直交補空間 $M^-(x)$を U(r) × U(m−r)と同一視すれば円板 CCL(x, U(r))中に在る．x をM^+内に動かしせばM^+上の円板束 D_r が出来る．U(m)の成層分解はすべての極地上の円板束の和 $⨿_r$ D_rで与えられる．

M = SU(m)でも同様；但し極地$G_r(C^m)$は偶数のrに対して存在する．対応する円板束をD_rと書けば，1からの距離がrの点全体が正しく D_{2r} になる；r = 0, 1, ･･･, or [m/2]．M = $G_r(C^m)$なら極地は $G_a(C^r)\times G_b(C^{m-r})$，a+b=r，で直交補空間は$G_a(C^{m-2b})\times G_b(C^{2b})$であり$G_a(C^r)\times G_b(C^{m-r})$上の円板束 のファイバーは CCL(x, $G_a(C^{m-2b})$)である．これにより Mの成層分解と距離 d による分割が同時に得られる．

成層分解と Chow の定理の拡張は対称R空間で成立する．竹内　勝［都立大ｾﾐﾅｰﾉｰﾄ(1987)及びpreprint］が，田中　昇の理論［特にJ. Math. Soc. Japan (1965)，Hokkaido Math. J. (1985)］を使って証明した．

1987年12月9日　北大談話会

Genericな1階偏微分方程式

北大理　泉屋周一

$\mathbb{R}^{2n+1}$ $(\ni (x,z,p))$ 上に、標準1形式 $\theta = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ をあたえて、$\mathbb{R}^{2n+1}$ を接触多様体とみなす。この時はめ込み $i: L \to \mathbb{R}^{2n+1}$ が <u>Legendrian</u> であるとは $\dim L = n$ & $i^*\theta = 0$ をみたす事とする。今、$F: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ を1階偏微分方程式とする (i.e. $F^{-1}(0)$ は smooth submfd) 時、その <u>(abstract) solution</u> とは、$i(L) \subset F^{-1}(0)$ なる <u>Legendrian immersion</u> の事とする。$\pi: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ を $\pi(x,z,p) = (x,z)$ と定義して、$i: L \to \mathbb{R}^{2n+1}$ を Legendrian immersion とする時、$\pi \circ i$ の特異点を <u>Legendre 特異点</u>と呼ぶ。また、1階偏微分方程式 $F: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ に対して、$\pi | F^{-1}(0)$ の特異点を <u>π-特異点</u>と呼び、π-特異点の集合を $\Sigma(F)$ であらわす。$\Sigma(F)$ が Legendrian submanifold になっている時、それを $F=0$ の<u>特異解</u>と呼ぶ。

今、局所的な性質を調べるので、1階偏微分方程式芽 $F: (\mathbb{R}^{2n+1}, (x_0,z_0,p_0)) \to (\mathbb{R}, 0)$ について考える。それが <u>general type</u> であるとは、F のある代表元をとると $\pi | F^{-1}(0)$ が fold type ($\det(F_{p_i p_j}) \neq 0$) であるような点が $\Sigma(F)$ の中に dense に存在する事とする。この様なものは generic に存在する。この時、以下の定理を得た。

> 定理 I. "generic" な1階偏微分方程式芽 $F=0$ at (x_0, z_0, p_0) は特異解を持たない。そして、その $\Sigma(F)$ は高々 (x_0, z_0, p_0) を除いて abstract solutions の Legendre 特異点からなる。

general type の1階偏微分方程式芽で特異解をもつものについては以下の結果を得た。

> 定理 II. $F=0$ at (x_0, z_0, p_0) を general type の1階偏微分方程式芽で特異解 $\Sigma(F)$ を持つものとする。この時、各葉が abstract solution からなるような $F^{-1}(0)$ 上の foliation で (1) 各葉は $\Sigma(F)$ に横断正則的に交わる (2) $L(x,z,p)$ を fold point $(x,z,p) \in \Sigma(F)$ を通るような葉とすると、$d\pi(T_{(x,z,p)} L) = d\pi(T_{(x,z,p)} \Sigma(F))$ が成立するようなものがただ1つだけ存在する。

この２つの定理は "general type" の１階偏微分方程式の性質の大わくを決めるものである。そこで、さらにくわしく性質を調べるために $(x_0 z_0 p_0) \in \Sigma(F)$ が contact regular point (i.e. $\theta(T_{(x_0,z_0,p_0)}F^{-1}(0)) \neq 0$) の場合にその方程式の解の特異点の配置 (configuration) を調べる方法を考える。

R^{2n+1} の coordinate $(x_1, \cdots x_n, z, p_1, \cdots p_n)$ について Legendre 変換 を

$$X_1 = p_1, \cdots, X_n = p_n, Z = x_1p_1 + \cdots + x_np_n - z, P_1 = x_1, \cdots, P_n = x_n$$

と定める。この時、$G(X_1, \ldots X_n, Z, P_1 \cdots P_n) = F(P_1 \cdots P_n, P_1X_1 + \cdots + P_nX_n - Z, X_1 \cdots X_n)$

とおくと、$F^{-1}(0)$ の contact regular point は $G^{-1}(0)$ の π-regular point に対応することがわかる。この時、以下の古典的結果が知られている

定理　１階偏微分方程式 $G(X_1, \ldots X_n, Z, P_1 \cdots P_n) = 0$ が

$\frac{\partial G}{\partial P}(X_0 Z_0 P_0) \neq 0$ & $G(X_0 Z_0 P_0) = 0$ をみたす時、$(X_0 Z_0 P_0)$ のある近傍で $Z = f(X_1 \cdots X_n, C_1 \cdots C_n)$ （ただし $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial C}, \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial C}\right) = n$）なる（古典）解をもつ。

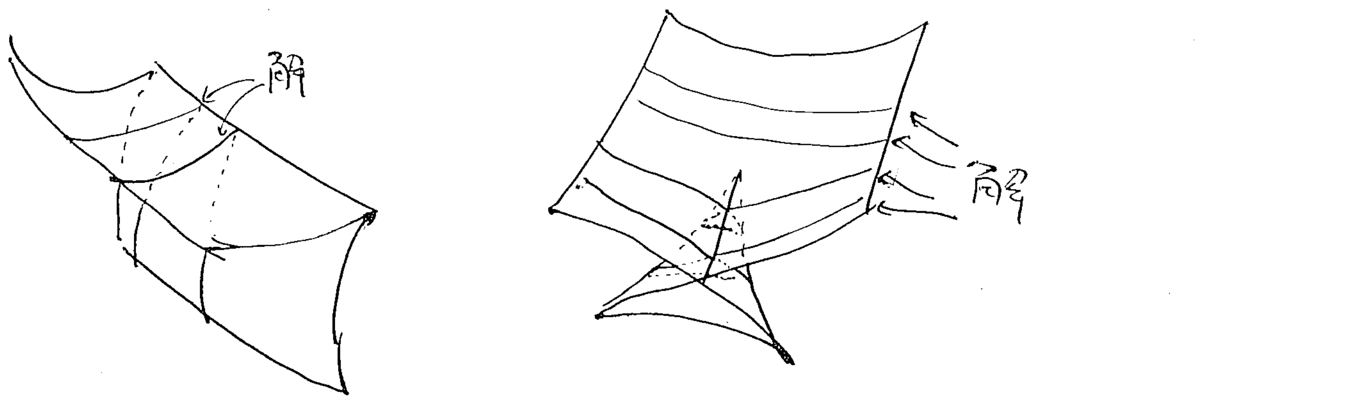
従って この $f(X_1 \cdots X_n, C_1 \cdots C_n)$ を Legendre 変換すると $F^{-1}(0)$ の解が得られる。このようにして得られた $F^{-1}(0)$ の解の generating family は

$$f(X_1 \ldots X_n, C_1 \cdots C_n) - z - \sum_{i=1}^{n} u_i X_i$$

という函数族であたえられるので、$(u_1 \cdots u_n, z)$ $(C_1 \cdots C_n)$ を separated parameter とする P-K-同値類が $F^{-1}(0)$ の解の configuration を決定していることがわかる。たとえば $n=1$ の時、generic なものを分類すると

$x^2 - ux + c - z$ 　 $x^3 - ux + c - z$ 　 $x^4 - ux + cx^2 + c - z$

となり 後の２つは 以下の図の様に解が配置されている事がわかる



これは $n=1$ のときに Bruce が示した事の "キチン" とした証明である

ON PERTURBATION PROBLEM OF EMBEDDED EIGENVALUES IN QUANTUM FIELD THEORY

Asao Arai
Department of Mathematics
Hokkaido University

Let $\mathcal{H}$ be an infinite dimensional complex separable Hilbert space and $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ be the Fock space over $\mathcal{H}$. Let h be a non-negative self-adjoint operator acting in $\mathcal{H}$ and $d\Gamma(h)$ be the second quantization of h acting in $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$. In the Hilbert space

$$\mathcal{F} = L^2(R) \otimes \mathcal{F}_s(\mathcal{H}),$$

we consider a class of Hamiltonians of the following form :

$$H = I \otimes d\Gamma(h) + \omega_0 a^* a \otimes I + H_I$$

where $\omega_0 > 0$ is a constant parameter, a is the annihilation operator on $L^2(R)$ and H_I is a symmetric operator consisting of quadratic operators with respect to Boson annihilation and creation operators, a and a^*. We regard as $H_0 = I \otimes d\Gamma(h) + \omega_0 a^* a \otimes I$ as the unperturbed part and H_I as the perturbation. The operator H_0 is non-negative and self-adjoint. If h has a non-empty continuous spectrum, then H_0 has embedded eigenvalues coming from the eigenvalues of $\omega_0 a^* a$. Under some general conditions, it is proved that all such embedded eigenvalues of H_0 disappear under the perturbation H_I. We remark that the class of the Hamiltonians unifies some existing quantum field models.

談話会記録(1988年1月13日)

楕円型偏微分方程式と対称化 — Talentiの仕事について。

島倉紀夫(京大理)

G. Talentiの論文，特に下記の1，の簡単な紹介。
$\mathbb{R}^n$の領域ΩにおけるDirichlet問題

(1) $$-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\}+c(x)u=f(x) \text{ in } \Omega\ ;\ u=0 \text{ on } \partial\Omega;$$

を考える。Ωは有界でなくてもよいが$n=2$のときは体積が有限とする。
係数 $a_{jk}(x)$，$c(x)$は実数値可測函数で

$$\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqq \sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\quad,\quad c(x)\geqq 0.$$

をみたすとする。$f(x)\in L^p(\Omega)$ ($n=2$なら$p>1$，$n\geqq 3$なら$p=\frac{2n}{n+2}$)
とする。そしてuは(1)の弱解とする。

他方，Ωと同じ体積をもつ(原点を中心とする)n次元球(または$\mathbb{R}^n$全体)を$\Omega^{\star}$として，Ω上の実数値可測函数uから$\Omega^{\star}$上の可測函数$u^{\star}$を次のように定める：

$[0,+\infty)\ni t$ に対して $\mu(t)=\{x\in\Omega\ ;|u(x)|>t\}$のルベーグ測度，
$[0,+\infty)\ni s$ に対して $u^*(s)=\sup\{t\geqq 0\ ;\ \mu(t)>s\}$，
$x\in\Omega^{\star}$ に対して $u^{\star}(x)=u^*(C_n|x|^n)$，ただし $C_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$。

$u^{\star}$のことをuのspherically symmetric rearrangementと呼ぶ。
(1)の解をuとして$u^{\star}$を定義し，他方

(2) $$-\Delta v(x)=f^{\star}(x) \text{ in } \Omega^{\star}\ ;\ v=0 \text{ on } \partial\Omega^{\star}$$

の解をvとする(vは$|x|$のみの函数である)。

<u>定理</u>(G. Talenti 1) (i) $\Omega^{\star}$で至る所 $u^{\star}\leqq v$;
(ii) $0<q\leqq 2$ ならば

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^{q/2}dx\leqq\int_{\Omega^{\star}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right\}^{q/2}dx.$$

この定理の(i), (ii)のどちらの不等式も, $\Omega=\Omega^\star$, $f=f^\star$, $a_{jk}=\delta_{jk}$かつ$c=0$ならば等式となる. 従って両不等式とも最良である. また(2)の解vは$f^\star$を用いて具体的に表示できる((2)は求積法によって解くことのできる常微分方程式に帰着される). とくに(i)により, 各tについて集合 $\{x\in\Omega ; |u(x)|>t\}$ の測度を$f^\star$を用いて評価することができる.

(i)の応用として, Ωが有界領域のとき$\partial\Omega$と0である函数uに対して

$$\max|u| \leqq K_{n,p}|\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\Delta u|^p dx\right)^{1/p}, \quad \text{ただし } n/2<p\leqq+\infty$$

がなりたつことがわかる, ここで $(1/p)+(1/q)=1$ とすると

$$n\geqq 3 \text{ のとき} \quad K_{n,p}=\frac{1}{(n-2)nC_n^{2/n}}\left\{\frac{\Gamma(q+1)\Gamma\left(\frac{n}{n-2}-q\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{n-2}\right)}\right\}^{1/q},$$

$$n=2 \text{ のとき} \quad K_{2,p}=\Gamma(q+1)^{1/q}/(4\pi).$$

$K_{n,p}$の値は最良である. 上記の定理と論文2の結果を組合せると, さらにいくつかのそれぞれ最良の不等式が得られる.

なお論文4では(1)が1階の項を含む場合への拡張, 論文3では発散型の非線形方程式への拡張, をそれぞれ論じている. 論文1が最も基本的である.

文献(いずれもG. Talenti)

1 Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 3 (1976), 697-718.

2 Ann. Mat. pura appl. (4) 110 (1976), 353-372.

3 Ann. Mat. pura appl. (4) 120 (1979), 159-184.

4 Boll. Unione Mat. Italiana (6) 4 (1985), 917-949.

各元が特殊な2元の和であるような環

岡山大理　富永　久雄

以下，Rは環とし，その中心をCとする．E, NでそれぞれRのべき等元集合とべき零元集合をあらわすことにする．$E_n = \{x \in R \mid x^n = x\}$，$P = \bigcup_{n \geq 2}^{\infty} E_n$とし，$R$の各元$x$に対して$x^m \in P$となる自然数$m$が存在するとき，$R$は周期環であるという．

A, BをRの部分集合としたとき，次の条件を考える：

$(A+B)$　$\forall x \in R$, $\exists a \in A$, $b \in B \mid x = a+b$

$[A+B]$　$\forall x \in R$, $\exists a \in A$, $b \in B \mid x = a+b$; $[a,b]=0$

$(A+B)_1$　$\forall x \in R$, $\exists_1 a \in A$, $b \in B \mid x = a+b$

$[A+B]_1$　$\forall x \in R$, $\exists_1 a \in A$, $b \in B \mid x = a+b$, $[a,b]=0$

$A \perp B$　$\forall a \in A$, $\forall b \in B$; $ab = ba = 0$

$[A \perp B]$　$\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $[a,b]=0 \Rightarrow ab=0$.

A, BがP, E, Nである場合に次の諸結果がなりたつ：

TH. 1．次は同値：

1) $R = E_3$

2) $[E+E]$

TH. 2．次は同値：

1) Rは周期環

2) $[P+N]$

TH. 3．次は同値：

1) $(P+N)_1$

2) $[P+N]$, $E \perp N^*$，ここに$N^* = \{x \in R \mid x^2 = 0\}$.

3) $R = P \oplus N$

TH. 4．次は同値：

1) $[P+N]_1$

2) $[P+N]$, $[E \perp N^*]$

TH. 5．次は同値；

1) $[E+N]_1$

2) $[E+N]$

3) $\forall x \in R$, $x - x^2 \in N$

4) $N \triangleleft R$, R/Nはブール環

TH. 6　次は同値：

1) $(E+N)_1$, $E \perp N^*$
2) $(E+N)$, $E \perp N^*$
3) $\forall x \in R$, $x - x^2 \in N$; $E \perp N^*$
4) $N \triangleleft R$, R/N はブール環, $E \perp N^*$
5) $R = E \oplus N$

$n > 1$ として，次の条件を考える：

$(\#)_n$　　$\forall x \in R$, $x^n - x \in N$.

TH. 5 によれば，R が $(\#)_2$ をみたせば $N \triangleleft R$ である．
このことに関連して，次の TH. がなり立つ．

TH. 7. 次は同値：

1) R が $(\#)_n$ をみたせば，$N \triangleleft R$.
2) $n \not\equiv 1 \pmod 3$, $n \not\equiv 1 \pmod 8$
3) $\forall$ 素数 p, $n \not\equiv 1 \pmod{p^2 - 1}$
4) $\forall$ 素数 p, $M_2(GF(p))$ は $(\#)_n$ をみたさない．

Dirichlet の定理によれば

$|\{\text{prime } n \mid n \equiv 5 \pmod{24}\}| = \infty$

$|\{\text{prime } n \mid n \equiv 1 \pmod{24}\}| = \infty$

これより，TH. 7 の条件をみたす素数 n は無数に存在し，
そうでない素数 n もまた無数に存在することがわかる．

２４の不思議.

２４という数が数学のいろいろなところに登場する．しかも，普通ではあり得ないような，異常に良い性質を持ったもの（Golay 符号，Leech 格子，保型関数等）と関係して現れるように見える．これは果して偶然や気のせいだけなのだろうか．それとも，何か全体を統制する極値問題の類でもあるのだろうか．主な文献のリストだけを掲げておく．

参考文献.

[1] Apostol,T.M.: "Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory", Springer, 1976.

[2] 数学のあゆみ, vol. 20, 1980. （特に，「Monster と Modular 関数」（吉荒），「Mackay's observation について」（清水）．

[3] Chandrasekharan,K.: "Elliptic Functions", Springer, 1985.

[4] Chapline, G: Unification of gravity and elementary particle interactions in 26 dimensions?, Physics Letters B, 158B(1985), 393-396.

[5] Conway,J.H.: Three lectures on exceptional groups, Chapter VII of: Powell and Higman, "Finite Simple Groups", Academic Press, 1971.

[6] Conway,J.H. and Norton,S.P.: Monstrous moonshine, Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 308-339.

[7] Conway,J.H. and Sloane,N.J.A.: "Sphere Packings, Lattices and Groups", Springer, 1987.

[8] 土井・三宅：「保型関数論」，紀ノ国屋，

[9] Frenkel,I., Lepowsky,J. and Meurman,A.: A natural representation of the Fischer-Griess Monster with the modular function J as character, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 81 (1984), 3256-3260.

[10] Frenkel,I., Lepowsky,J. and Meurman,A.: An introduction to the Monster, in "Uniified String Theories", M.G.Green and D.Gross, edited, World Scientific, Singapore 1986, pp. 533-546.

[11] Gorenstein,D.: "Finite Simple Groups", Plenum Press, 1981.

[12] Green, M. B., Schwartz, J. H. and Witten, E.: "Superstring Theory I, II", Cambridge Univ. Press, 1987.

[13] Griess, R. L.: The friendly giant, Inv. Math., 69 (1982), 1-102.

[14] Kac, V. G.: Infinite dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Moebius function, and the very strange formula, Adv. Math., 30 (1978), 85-136.

[15] Kac, V. G.: "Infinite Dimensional Lie Algebras", Cambridge University Press, 1985 (second edited).

[16] Lepowsky, J., Mandelstam, S. and Singer, I. M. (ed.): "Vertex Operators in Mathematics and Physics", Springer, 1983.

[17] MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A.: "The Theory of Error-Correcting Codes", North-Holland, 1977.

[18] Mckay, B. D. (editor): "Finite Groups — Coming of age", Contemp. Math. 45 (1985)

[19] Serre, J. P.: "A course of arithmetic", Springer, 1973. (翻訳あり。)

[20] Sloane, N. J. A.: Self-dual codes and lattices, in "Relations between Combinatorics and Other Parts of Mathematics", Proc. Symp. Pure Math., vol. 34, Amer. Math. Soc. 1979, pp. 273-308.

[21] 数理科学(超弦理論特集号), 1986, vol. 11, サイエンス社.

[22] Thierry-Mieg, J.: Anomaly cancellation and fermionisation in 10-, 18-, and 26-dimensional superstrings, Phys. Lett. B, 171 (1986), 163-169.

[23] Thompson, T. M.: "From Error-Correcting Codes through Sphere Packings to Simple Groups", The Carus Math. Monographs, no. 21, The Mathematical Association of America, 1983.

[24] Yoshida, T.: On character-theoretic transfer (II), J. Algebra, in press.

吉田知行(北大・理・数学)

Rigidity of complex submanifolds and Maximal surfaces

Kinetsu Abe

Abstract.

In 1953, Calabi proved a rigidity theorem for Kählerian submanifolds in complex space forms. The Calabi rigidity theorem, since then, has been successfully applied to various areas in geometry. Among them is the study of minimal surfaces in real space forms.

The current resurgence of interest in indefinite metric geometry, partly stimulated by the recent developments in theoretical physics, has generated many spontaneous problems in that setting.

The purpose of this talk is two fold. Firstly, we wish to look into the general theory of indefinite (real or complex) metric geometry. In this context, we show an analogue of the Calabi rigidity theorem for general signature. Secondly, we present an application of our result to describe the moduli space of the maximal surfaces. This corresponds to the description of the minimal surfaces in $\mathbb{R}^n$ due to Calabi et al.

Our main results state:

Theorem 1. Let M^n_s be a connected indefinite Kählerian manifold of signature s $(0 \leq s \leq k)$. Let $f: M^n_s \to \mathbb{C}^N_k$ be a holomorphic and isometric immersion of M^n_s into $\mathbb{C}^N_k$. Then, up to the holomorphic isometries of $\mathbb{C}^N_k$, f is decomposed into the following three parts: There is a unique triple (α, β, γ) of integers $(\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0)$ such that α and β depend only on the manifold M^n_s and independent of f. There is also a unique canonical decomposition $\mathbb{C}^N_k = \mathbb{C}^{2\gamma}_\gamma \oplus \mathbb{C}^{\alpha+\beta}_\alpha \oplus \mathbb{C}^{N-(\alpha+\beta+2\gamma)}_{k-(\alpha+\gamma)}$ of $\mathbb{C}^N_k$ depending on f. With respect to the decomposition, f factors into $f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$. f_1 maps M^n_s into $\mathbb{C}^{2\gamma}_\gamma$ in such a way that the image of M^n_s under f_1 is contained in Span $(L_1, \cdots, L_\gamma)$, f_2 maps M^n_s into $\mathbb{C}^{\alpha+\beta}_\alpha$ fully and uniquely up to the holomorphic isometries of $\mathbb{C}^N_k$ and f_3 maps M^n_s into the origin of $\mathbb{C}^{N-(\alpha+\beta+2\gamma)}_{k-(\alpha+\gamma)}$.

<u>Theorem 2</u>. Let $\lambda : M \to \mathbb{C}^m_k$ be holomorphic and $\beta : M^2 \to \mathbb{R}^n_j$ be space-like and have $\eta = 0$ with $\|\lambda'\|^2 = \|\sqrt{2}\,\beta / dw\|^2$. In addition assume both are full or non-degenerately full and for some $P_0 \in M^2$, $\lambda(P_0) = \beta(P_0) = 0$. Then, there is a transformation $A \in U(k, m-k)$ so that

$$\beta = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\, S \begin{bmatrix} \vec{h} \\ \mathrm{neg}(\pi \circ A \circ \lambda') \\ \mathrm{Pos}(\pi \circ A \circ \lambda') \end{bmatrix},$$

where S is an $n \times n'$-complex matrix (where $n' = m - 2l + 2l'$) satisfying

(i) ${}^t\bar{S}\, I_{j,n-j}\, S = I_{j',n'-j'}$;
(ii) ${}^t\lambda'\, {}^tS\, I_{j,n-j}\, S \lambda' = 0$
(iii) $n' \leq n \leq 3n'$.

Topologically principal part of analytic functions

Etsuo YOSHINAGA

The purpose of this talk is to search a topologically principal part of the Taylor expansion of a given analytic function $f(x)$ at the origin of Euclidean space. Here, the topologically principal part should satisfy the properties that it is a part of the Taylor expansion of $f(x)$ as small as possible and the local topological type of $f(x)$ at the origin is determined by it.

Let $K:=R$ or C and $A(K^n)$ be the set of all germs of analytic functions $f:(K^n,0)\longrightarrow(K,0)$ at the origin of K^n.

Let $\Gamma_+(f)$ be the Newton polygon of $f\in A(K^n)$, the convex hull of the set

$$\cup\{k+R_+{}^n \mid a_k\neq 0\}$$

in R^n where R_+ is the set of all non-negative real numbers, for the Taylor expansion

$$f(x)=\sum_k a_k x^k=\sum_k a_{k_1,k_2,\cdots,k_n} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2}\cdots x_n{}^{k_n}.$$

Let S be a subset of $Z_+{}^n$ (or $R_+{}^n$) where Z_+ is the set of all non-negative integers and define $f_S:=f|S:=\sum_{k\in S\cap Z_+{}^n} a_k x^k$.

(1.2) Definition. An $f\in A(K^n)$ (or the Newton principal part of f) is non-degenerate if $\{x\in K^n \mid \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_1}=\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_n}=0\}\subset\{x_1x_2\cdots x_n=0\}$ for any compact face γ of $\Gamma_+(f)$.

(1.4) Definitions.

(1.4.1) $|\mathrm{Grad}\, f|^2:=|(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\ x_2\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\ x_n\frac{\partial f}{\partial x_n})|^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}|^2.$$

For a given $k\in Z_+^n$, define

$(1.4.2)_k$ Condition : There exists a positive $\varepsilon=\varepsilon(k)$ such that

$$|\mathrm{Grad}\ f|\geq\varepsilon|x^k|$$

in a neighbourhood of the origin of K^n.

(1.4.3) Let $\Lambda_+(f)$ be the convex hull of the set

$$\cup\{k+R_+^n \mid \text{Condition } (1.4.2)_k \text{ holds}\}$$

in R^n. We call $\Lambda_+(f)$ a <u>gradient polygon</u> of f.

Let m be the order of the function $|\mathrm{Grad}\ f|$ on $V:=V(f):=\{x\in K^n \mid |\mathrm{Grad}\ f|=0\}$. Namely

(1.4.4) $m:=m(f)$

$$:=\tfrac{1}{2}\mathrm{Min}\{\text{the order of } |\mathrm{Grad}\ f|^2 \text{ at } x_0 \mid x_0\in V(f)\}.$$

For a given $k\in Z_+^n$, define

$(1.4.5)_k$ Condition : There exists a positive $\varepsilon=\varepsilon(k)$ such that

$$|\mathrm{Grad}\ f|^{1+1/m}\geq\varepsilon|x^k|$$

in a neighbourhood of the origin of K^n.

(1.4.6) Let $\tilde{\Lambda}_+(f)$ be the convex hull of the set

$$\cup\{k+R_+^n \mid \text{Condition } (1.4.5)_k \text{ holds}\}$$

in R^n. We call $\tilde{\Lambda}_+(f)$ a <u>quasi gradient polygon</u> of f.

Then we can show that $\Gamma_+(f)\supset\Lambda_+(f)\supset\tilde{\Lambda}_+(f)$.

(1.5) Theorem. <u>Suppose that one of the following two conditions holds for an analytic function</u> g(x):

(1.5.1) $\Gamma_+(g)\subset\tilde{\Lambda}_+(f)$.

(1.5.2) $\Gamma_+(g)\subset\mathrm{Int}\Lambda_+(f)$ <u>and</u> $V(f)=\{0\}$.

<u>Then the family</u> f+ug <u>is topologically trivial, identically on</u>

$V(f)$, along $I:=\{u\in R \mid 0\leq u\leq 1\}$. Namely there exists a local homeomorphism $H:(K^n\times R,0\times I)\longrightarrow(K^n\times R,0\times I)$ such that the following commutative diagram (1.5.3) holds :

(1.5.3) Commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
 & (V\times R,0\times I) \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] & \\
(K^n\times R,0\times I) \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] & & (K^n\times R,0\times I) \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dd, "f+ug"] \\
 & (R,I) & \\
(K^n,0) \arrow[rr, "f"'] & & (K,0)
\end{tikzcd}$$

where p_1, p_2 are the canonical projections and i is the inclusion map.

(1.6) Theorem. Suppose $\Gamma_+(g)\subset\Lambda_+(f)$ for an analytic function g and $V(f)=\{0\}$. Then $f(x)+ug(x)$ is topologically trivial along $I(\delta)=\{u\in R \mid 0\leq u\leq\delta\}$ for a sufficiently small positive δ. Namely, there exists a local homeomorphism $H:(K''\times R,0\times 0)\longrightarrow(K^n\times R,0\times 0)$ such that the commutative diagram (1.5.3) replacing I by 0 holds.

(1.7) Theorem. An f is non-degenerate if and only if $\Gamma_+(f)=\Lambda_+(f)$.

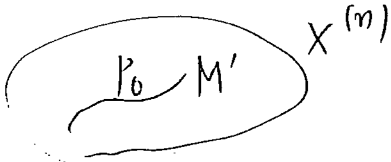
アブストラクトCR-structureの局所埋めこみ問題について

初めてCR-structureという言葉を聞かれる方もおられると思いますのでまずアブストラクトCR-structureを定義します。 M を $2n-1$ 次元の実微分可能-多様体, E を $\mathbb{C}\otimes TM$ のsubbundleで次の1)と2)を満たすものとする。

1) $E\cap\overline{E}=0$, $f\text{-}\dim\left(\mathbb{C}\otimes TM/(E+\overline{E})\right)=1$,

2) $[\Gamma(M,E),\Gamma(M,E)]\subset\Gamma(M,E)$

このpair (M,E) をアブストラクトCR-structureと呼ぶ。これは複素多様体上のreal hypersurfaceの一般化ですなわち $X^{(n)}$ を n-次元複素多様体, そして M' をそのreal hypersurface, $M'=\{p: h(p)=0\}$, ここで h は $X^{(n)}$ 上の実 C^{r}-functionで $(dh)(p_0)\neq0$



p_0 の近傍で考えて

$$E' :\stackrel{\text{def}}{=} T^{0,1}X|_{M'} \cap \mathbb{C}\otimes TM'$$

とすると pair (M', E') は、上の 1) と 2) を満たす。

取り扱う問題は、アブストラクトな CR-structure (M, E) は、"局所的に" 複素多様体上の real-hypersurface より導かれるか？ という問題で この問題について得られた結果を解説します。

(real analytic では trivial, C^∞ では非常に難しい問題)

ここで "局所的" とは、アブストラクト CR-structure (M, E) が与えられたとき、p_0 を M の reference point として ある p_0 の近傍 $U(p_0)$ が存在して

$$f : (U(p_0), E|_{U(p_0)}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

が CR-embedding, i.e.,

f は C^∞-embedding of $U(p_0)$ で

$$Xf_j = 0 \quad \forall X \in E, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$f = (f_1, \ldots, f_n)$,

それ故 問題は、「アブストラクトな CR-structure (M, E) が与えられれば、アブストラクトな意味での $\bar\partial_b$-operator が定義されるが、この $\bar\partial_b$-equation $\bar\partial_b u = 0$ が十分多くの解を持つか？」という捉られる。丁度 Newlander-Nirenberg theorem の real hypersurface 版が成立するかどうか？という問題になる ~~になる~~。この問題を strongly pseudo convex の仮定の下で調べよう。

(アブストラクト CR-structure の時も strongly pseudo convex という概念が定義されるが、今日は省略します。)

$(M^{(2n-1)}, E^{(n-1)})$ を、アブストラクト strongly pseudo convex CR-structure として P_0 をその reference point とする。

1) $n=2$ L. Nirenberg の反例がある。

Nirenberg の反例を少し解説します。Nirenberg の反例は、H. Lewy の有名な counter example を基に構成したもので、H. Lewy の counter example とは、$\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}\ (z, t)$

$$L = \partial/\partial \bar{z} + \sqrt{-1}\, z\, \partial/\partial t$$

$$* \qquad Lu(z, \bar{z}, t) = f(t)$$

ここで $f(t)$ は、t にのみ depend する実数値 C^∞-function で $u(z, \bar{z}, t)$ は、未知関数。H. Lewy は、もし上の $*$ が原点のある近傍で C^1-級の解をもつならば $f(t)$ は、自動的に(そこで)実解析的になる。それ故もし $f(t)$ として C^∞ だが実解析的でない関数を与えれば C^1-級の解は、存在しない。$*$ は、inhomogeneous だが Nirenberg は、

上の operator を modify して 1-st order diff. op. $\tilde{L}$ で

$$\tilde{L}\, u(z,\bar{z},t) = 0 \quad , u(z,\bar{z},t) \text{ of } C^1$$

$$\Longrightarrow \quad u(z,\bar{z},t) = \text{定数}$$

となるものを構成している。 $E := \mathbb{C}\tilde{L} \hookrightarrow \mathbb{C}\otimes T\mathbb{R}^3$

$$(\mathbb{R}^3, E)$$

を考えると これは $\mathbb{C}^2$ に local CR-embedding は できない。

2) $n \geq 5$ (倉西) OK, local embedding theorem が成立する! (1980)

3) $n = 4$, 同様に ok (赤堀) (1984)

なぜ $n = 4$ が証明できたか説明します。そのために倉西の ($n \geq 5$) の時の証明を思い出します。

倉西の証明は、次の２つの step にわかれる。

$(M, {}^{\circ}T'')$ を、アブストラクト CR-structure そして

P_0 を、M の reference point とする。

<u>step 1.</u> $f : (M, {}^{f}T'') \hookrightarrow \mathbb{C}^n$

f は、C^∞-embedding，そして ${}^{f}T''$ は、induced

CR-structure by f，するとある特別な

P_0 の近傍系 $U_\varepsilon(f)$ が存在してもし

<u>$\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-1 \geq 7$</u>，i.e.，$n \geq 4$ の時，

$\Gamma(U_\varepsilon(f), ({}^{f}T'')^*)$ 上で Neumann operator N_b^f

が存在して Kodaira-Hodge decomposition

type theorem for $\bar\partial_b^f$

$$u = \bar\partial_b^{f*} \bar\partial_b^f N_b^f u + \bar\partial_b^f \bar\partial_b^{f*} N_b^f u$$

$$\forall u \in \Gamma(U_\varepsilon(f), ({}^{f}T'')^*)$$

が成立，ここで $\bar\partial_b^f$ とは，CR-structure

$(M, {}^{f}T'')$ より induce される operator，そして

$\bar\partial_b^{f*}$ は、$\bar\partial_b^f$ の L^2-adjoint operator.

もし $\underline{\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-1 \geq 9}$, i.e., $n \geq 5$ の時

$\Gamma(U_\varepsilon(f), \Lambda^2({}^fT'')^*)$ 上でも Neumann operator

N_b^f が存在して Kodaira-Hodge decomposition

type theorem

$$v = \bar\partial_b^{f*}\bar\partial_b^f N_b^f v + \bar\partial_b^f \bar\partial_b^{f*} N_b^f v$$

$$\forall v \in \Gamma(U_\varepsilon(f), \Lambda^2({}^fT'')^*)$$

が成立する。

<u>step 2.</u> 上の Neumann ~~type~~ operator N_b^f

を使って Nash-iteration を、やろう。

$$f^{(0)} : (M, {}^0T'') \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C}^n$$

(<u>適当によい近似</u>), $j^{(k_0)}(\bar\partial_b f^{(0)})(p_0) = 0$

$f^{(0)}$ よりよい<u>近似</u> $f^{(1)}$ を

$$f^{(1)} = f^{(0)} - M_0\left(\bar\partial_b^{(0)*} N_b^{f^{(0)}}(\bar\partial_b f^{(0)})\right)$$

$$\text{on } U_\varepsilon(f^{(0)})$$

$\bar{\partial}_b$ は，$(M, {}^\circ T'')$ より induce された operator，M_0 は，smoothing function．

induction で

$$f^{(\mu+1)} = f^{(\mu)} - M_\mu\left(\bar{\partial}_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)}\left(\bar{\partial}_b f^{(\mu)}\right)\right)$$

$$\text{on} \quad U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$$

M_μ : smoothing function

$N_b^{(\mu)}$ とは，$N_b^{f^{(\mu)}}$ で上で構成された op.
$\bar{\partial}_b^{(\mu)*}$ 〃 $\bar{\partial}_b^{f^{(\mu)}*}$

(この段階まででは，$\dim_{\mathbb{R}} M \geq 7$，i.e.，$n \geq 4$ で十分)．

Convergent が問題．上の $f^{(\mu)}$，$U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$ が convergent して その極限が

$$\bar{\partial}_b f = 0$$

を，満たせば OK．

どうやって証明するかというと

$$P_\mu := \|\bar\partial_b f^{(\mu)}\|_{U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})} + \|f^{(\mu)} - f^{(\mu-1)}\|_{U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})}$$

としてもし任意の μ に対して

$$* \qquad P_{\mu+1} \leqq \bigcirc P_\mu^2 + \triangle,$$

(ここで $\bigcirc$ は、少々大きくてもよく $\triangle$ は、かなり小さい)

が証明できれば、Moser's lemma より

$$P_\mu \longrightarrow 0 \qquad (\text{as } \mu \to +\infty)$$

それゆえ convergence がいえる。実際にチェックする。

$$\bar\partial_b f^{(\mu+1)} = \bar\partial_b f^{(\mu)} - \bar\partial_b\left\{M_\mu\left(\bar\partial_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)}(\bar\partial_b f^{(\mu)})\right)\right\}$$

$$\fallingdotseq \bar\partial_b f^{(\mu)} - \bar\partial_b \bar\partial_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)}(\bar\partial_b f^{(\mu)})$$

$$\fallingdotseq \bar\partial_b f^{(\mu)} - \bar\partial_b^{(\mu)} \bar\partial_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)}(\bar\partial_b f^{(\mu)})$$

$$+ \underline{(\bar\partial_b^{(\mu)} - \bar\partial_b)}\, \bar\partial_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)} \underline{(\bar\partial_b f^{(\mu)})}$$

$$\fallingdotseq \bar\partial_b^{(\mu)*} \bar\partial_b^{(\mu)} N_b^{(\mu)}(\bar\partial_b f^{(\mu)})$$

$$+ \qquad \text{''}$$

(1-form に対する Kodaira-Hodge decomposition th.)

$$\doteqdot \bar{\partial}_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b f^{(\mu)}$$

（ 2-form に対しても Neumann op. の存在が必要 ）

（倉西が $n \geqq 5$ を使ったのは，この部分）

$$\doteqdot \bar{\partial}_b^{(\mu)*} N_b^{(\mu)} (\bar{\partial}_b^{(\mu)} - \bar{\partial}_b) \bar{\partial}_b f^{(\mu)}$$

ここでなぜ

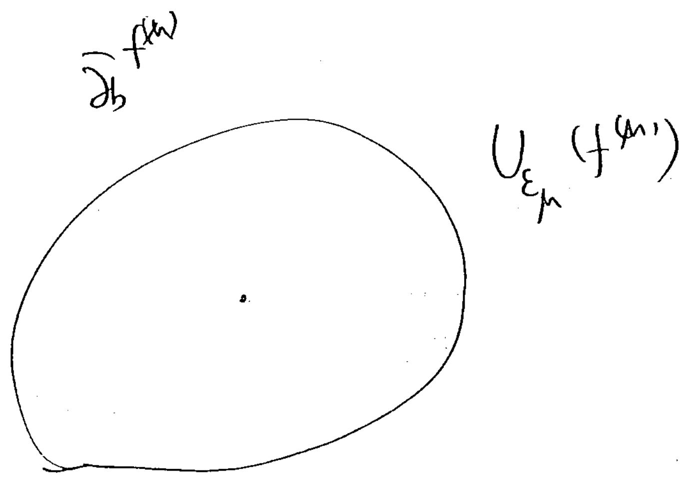
$$\underline{\bar{\partial}_b^{(\mu)*} \bar{\partial}_b^{(\mu)}} N_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b f^{(\mu)}$$

$$= N_b^{(\mu)} \underline{\bar{\partial}_b^{(\mu)*} \bar{\partial}_b^{(\mu)}} \bar{\partial}_b f^{(\mu)} \quad \text{on} \quad U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$$

としなかったのか？ もしこのことが成立すれば 1-form に対する Kodaira-Hodge decomposition th. で十分．

しかし右辺は，意味がない。 $\bar{\partial}_b^{(\mu)*}$ とは，$\bar{\partial}_b^{(\mu)}$ の $U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$ 上での Hilbert adjoint op.（しかも $U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$ は boundary をもつ。）を示す故 $\bar{\partial}_b^{(\mu)*}$ の定義域に $\bar{\partial}_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b f^{(\mu)}$ がはいるためには，$U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$ の boundary 上で ~~$\bar{\partial}_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b f$~~ $\bar{\partial}_b^{(\mu)} \bar{\partial}_b f^{(\mu)}$ の normal-

componentが消える必要がある。しかし各stepで
$U_{\varepsilon_\mu}(f^{(\mu)})$は、異なる。$C^\infty$かどうかは、チェックできるが
boundary上でnormal componentが消えるかどうか
チェックするのは、困難。



しかし問題を、全てboundary方向にreductionする。
$(\bar\partial_b)_b$-問題に帰着させKuranishiのNash-
iterationのレールにのせる。そうするとboundary
conditionが出ないから自由に上のことが出来る。

半線型熱方程式の解の爆発
最近の進展

北大 理　儀我美一

半線型熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u)$$

を考える。ここで例えば $f(u)$ が $u>0$ について単調増加かつ凸また $\int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty$ とすれば、初期値問題、初期値境界値問題とも、初期値によっては局所解は有限時間しか接続できず、ある時刻Tで、$u(x,t)$ の最大値は無限大になってしまう。この現象を解の爆発とよぶ。またTを爆発時刻という。解の爆発がおこるかおこらぬかという問題は、今から20年近く前に活発に研究された。近年は、爆発時刻付近での解の様子ということに焦点があてられている。Weissler により最初に指摘されたように、爆発は空間方向について一様にはおこらない。空間の点で爆発時刻近くで解が局所有界にならない点を爆発点とよぶ。今回は、爆発点における漸近挙動とその応用としての爆発点の分布状況についてふれたい。

鈴木 寛 (大阪教育大)

Incidence Matrices (Algebra) for 't-designs' on $H(d,q)$

0. Motivations.

- Wilson "Incidence Matrices of t-designs" Linear Alg. ad its Appl. 46 (1982)
  Kreher "An Incidence Algebra for t-designs with Automorphisms" J.C.T.(A) 42 (1986
  荒川 "一般化された結合行列について" 修論
- ◦ 一連の仕事を 他の Q-polynomial scheme で考える.
  現在考えているのは　Hamming scheme における Wilson の仕事に対応する部分
- Q-polynomial scheme の combinatorial な 定義 又は 性質.
- 't-design' と考えられる いい poset と Q-polynomial scheme との関係.
- coding theory における 様々な bound を, 自己同型群を 持つ場合に考える

Q-polynomial scheme と Delsarte の t-design.

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$: symmetric association scheme $\left(X \times X = \bigcup_{i=0}^{d} R_i \quad R_0 \text{ diag.} \quad {}^tA_i = A_i \quad \langle A_0, \ldots, A_d \right.$

$E_i \quad (i = 0, 1, \cdots, d)$: primitive idempotents.　A_i : adjacency matr

DEF. $\mathfrak{X}$: Q-polynomial scheme w.r.t. the ordering $E_0, E_1, \cdots, E_d$

$\Leftrightarrow \exists\, v_i^*(x) \in \mathbb{C}[x] \quad \deg v_i^* = i \qquad E_i = v_i^*(E_1)$ (multiplication by $\circ$,

DEF. $Y \subset X$

$(a_0, a_1, \cdots, a_d)$ = innerdistribution $\qquad a_i = |(Y \times Y) \cap R_i| / |Y|$

$Q = (q_j(i)) \qquad E_j = \sum q_j(i) A_i$

$(b_0, b_1, \cdots, b_d) = \frac{1}{|Y|}(a_0, \cdots, a_d)\, Q$

Y : t-design [Delsarte] $\Leftrightarrow \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_t = 0$

t-design [Delsarte] in $J(v,k) \Leftrightarrow$ t-design [Combinatorial]

〃 $\qquad H(d,q) \Leftrightarrow$ orthogonal array of strength t

注) Q-polynomial scheme では 自然な order が $\{E_i\}$ にある

Known Q-polynomial scheme には その poset による表現がある

$L = \bigcup_{i=0}^{d} X_i \qquad \alpha \in X_i \;\; \beta \in X_j \qquad \alpha \le \beta \Rightarrow i \le j$

$Y \subset X_d$ t-design $\Leftrightarrow$ for $\forall\, \alpha \in X_t \quad |\{y \in Y \mid \alpha \le y\}|$ = 一定

1. [t]-design. {t}-design.

DEF. 1 $d, q \in \mathbb{N}$ $\quad Q$: q-elt set, D: d-elt set

$$H(d,q) = \left(L = \bigcup_{j=0}^{d} X_j \text{ (disjoint)}, \ \leq \right) \quad \text{Hamming poset.}$$

$J \subset D$ $\quad X_J = Q^J$ $\quad$ (i.e. $Q^J = \{\alpha : J \to Q\}$)

$$X_i = \bigcup_{|J|=i} X_J \qquad X = X_d \qquad L_i = \bigcup_{j=0}^{i} X_j \qquad L = L_d$$

$\alpha_1 \in X_{J_1}$ $\quad \alpha_2 \in X_{J_2}$.

$\alpha_1 \leq \alpha_2 \iff J_1 \subseteq J_2 \quad \alpha_2|_{J_1} = \alpha_1$

$\alpha \in X_J$ we denote $J = D(\alpha)$

DEF 2 $t \leq k \leq d$

(1) $Y \subset X_k$: $[t]$-design or $[t]-((d,q),k;\lambda)$ design

$\iff |\{y \in Y \mid \alpha \leq y\}| = \lambda$: const. for $\forall \alpha \in X_k$ [Nagao · Atsumi.

(2) $Y \subset L$: $\{t\}$-design or $\{t\}-((d,q),\lambda_1,\cdots,\lambda_t)$ design

$\iff |\{y \in Y \mid \alpha \leq y\}| = \lambda_i$: const for $\forall \alpha \in X_i$ $\quad i = 1,\cdots,t$

注). $Y \subset X_k$: t-design or $t-(d,k,\lambda)$ design

$\iff Y \subset X_k$: $[t]-((d,1),k;\lambda)$ design

$Y \subset X$: orthogonal array of strength t.

$\iff Y \subset X$ $\quad [t]-((d,k),d;\lambda)$ design

DEF 3 A, B, C finite sets

$\mathrm{Mat}(A,B) = \{X : A \times B \to \mathbb{C}\} \ni X$. $\alpha \in A$, $\beta \in B$ $\quad X[\alpha,\beta]$: val.

$X \in \mathrm{Mat}(A,B)$ $\quad Y \in \mathrm{Mat}(B,C)$ Then $X \cdot Y \in \mathrm{Mat}(A,C)$

$$(XY)[\alpha,\gamma] = \sum_{\beta \in B} X[\alpha,\beta]\, Y[\beta,\gamma] \qquad \alpha \in A \quad \gamma \in C$$

DEF 4 In $H(d,q)$

(0) $A \subseteq L$ $\quad \mathbb{1}_A : A \to F$ $\quad \mathbb{1}_A[\alpha] = 1$ $\quad \forall \alpha \in A$, $\quad \mathbb{1}_{X_i} = \mathbb{1}_i$

(1) $W_{ij} \in \mathrm{Mat}(X_i, X_j)$ $\qquad W_{ij}[\alpha,\beta] = \begin{cases} 1 & \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(2) $\hat{W}^u_{ij} \in \mathrm{Mat}(X_i, X_j)$ $\qquad \hat{W}^u_{ij}[\alpha,\beta] = \begin{cases} 1 & \alpha\wedge\beta \in X_u \quad \exists x\in X \text{ s.t. } \alpha,\beta. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\alpha \in X_{J_1}, \beta \in X_{J_2} \rightarrow \quad D(\alpha\wedge\beta) = \{ s \in J_1 \cap J_2 \mid \alpha[s] = \beta[s] \}$

$\alpha\wedge\beta \mid D(\alpha\wedge\beta) = \alpha \mid D(\alpha\wedge\beta)$

(3) $Y \subset \sqcup$
$N_i \in \mathrm{Mat}(X_i, Y)$ $\qquad N_i[\alpha, y] = \begin{cases} 1 & \alpha \leq y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(4) $Y \subset X_k$
$C_Y \in \mathrm{Mat}(X_k, Y)$ $\qquad C_Y[\alpha, y] = \begin{cases} 1 & \alpha = y \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

So. $\quad N_i = W_{ik} C_Y$

LEMMA 1. $\quad 0 \leq i \leq j \leq t \leq k \leq d$

(1) $W_{ij} W_{jk} = \binom{k-i}{j-i} W_{ik}$

(2) $Y \subseteq X_k \quad [t]-((d,q), k, \lambda)$-design
$\Leftrightarrow \quad N_t \mathbb{1}_Y = W_{tk} C_Y \mathbb{1}_Y = \lambda \mathbb{1}_t$

(3) $Y \subseteq X_k \quad [t]-((d,q), k, \lambda)$-design
$\Rightarrow \quad [i]-((d,q), k, \lambda_i)$ design
with $\quad \lambda_i = \binom{d-i}{t-i} q^{t-i} \lambda \Big/ \binom{k-i}{t-i} = \binom{d-i}{k-i} q^{t-i} \lambda \Big/ \binom{d-t}{k-t}$

So in particular, it is a $\quad \{t\}-((d,q), \lambda_1, \cdots, \lambda_t)$-design
with $\quad \lambda_i = |Y| \binom{d-i}{k-i} \Big/ \binom{d}{k} q^i$

PROOF. (1) $W_{ij} W_{jk}[\alpha,\beta] = |\{ \gamma \in X_j \mid \alpha \leq \gamma \leq \beta \}| = \binom{k-i}{j-i}$

(2) Clear. $\quad (N_t \mathbb{1}_Y)[\alpha] = |\{ y \in Y \mid \alpha \leq y \}| = \lambda$

(3) $\lambda \cdot \binom{d-i}{t-i} q^{t-i} \mathbb{1}_i = \lambda W_{it} \mathbb{1}_t = W_{it} N_t \mathbb{1}_Y = W_{it} W_{tk} C_Y \mathbb{1}_Y$

$= \binom{k-i}{t-i} W_{ik} C_Y \mathbb{1}_Y = \binom{k-i}{t-i} N_i \mathbb{1}_Y$

2. Fisher - Ray Chaudhuri - Wilson inequality

Basic idea $\quad |Y| \geqslant \operatorname{rank} N_t \geqslant ?$ (a constant indep. with Y)

- $Y \subset X_k \quad [t]-((d,q),k,\lambda)$ - design

LEMMA 2 $\quad \binom{k-j}{i-j} N_j = W_{ji} N_i$

So $\quad U_j \subseteq U_i \quad$ if $j \leq i \leq t \quad$ where $U_i = R(N_i)$ the row space of N_i

$|Y| \geqslant \operatorname{rank} N_t \geqslant \operatorname{rank} N_i \geqslant \operatorname{rank} N_j$

LEMMA 3 $\quad i,j \leqslant k \qquad i+j \leqslant t.$

$$N_i N_j^T = \sum_{u=0}^{\min\{i,j\}} \lambda_{i+j-u} \hat{W}_{ij}^{u} = \frac{\lambda}{\binom{d-t}{k-t} q^{k-t}} W_{ik} W_{jk}^T$$

PROOF. $(N_i N_j^T)[\alpha,\beta] = |\{y \in Y \mid \alpha \leq y, \beta \leq y\}| = \begin{cases} \lambda_{i+j-u} & \text{if } \exists x \in X_k \ \begin{smallmatrix}\alpha \leq x \\ \beta \leq x\end{smallmatrix} \ \alpha \wedge \beta \in X_u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

LEMMA 4 $\quad$ Let $U_i = R(W_{ik}) \qquad i \leqslant k$

$x_0 \in X_d \qquad \tilde{X}_i = \{\tilde{\alpha} \in X_i \mid \tilde{\alpha} \wedge x_0 \in X_0\}$

Let $[\alpha]$ denote the row in W_{ik} corresponding to $\alpha \in X_i$

Let $\tilde{U}_i = \langle [\tilde{\alpha}] \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{X}_i \rangle \qquad$ Suppose $q \geqslant 2$

$\Rightarrow$ (1) $\dim \tilde{U}_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$

(2) $U_i = U_{i-1} \oplus \tilde{U}_i$

PROPOSITION 5. $\quad$ Let $Y \subset X_k$ be a $[2s]-((d,q),k,\lambda)$ design with $\lambda \neq 0$ $\quad$ Suppose $q \geqslant 2$. $\quad$ Then

$$|Y| \geqslant \binom{d}{0}(q-1)^0 + \cdots + \binom{d}{s}(q-1)^s$$

PROOF $\quad |Y| \geqslant \operatorname{rank}(N_{2s}) \geqslant \operatorname{rank}(N_s) \overset{\text{real}}{=} \operatorname{rank}(N_s^T N_s)$

$= \operatorname{rank}(N_s N_s^T)$

$$|Y| \geq \operatorname{rank}(N_s N_s^T) = \operatorname{rank}\left(\frac{\lambda}{\binom{d-t}{k-t} q^{k-t}} W_{sk} W_{sk}^T\right) = \operatorname{rank}(W_{sk} W_{sk}^T)$$
$$= \operatorname{rank}(W_{sk}^T W_{sk}) = \operatorname{rank}(W_{sk}) = \dim(R(W_{sk}))$$
$$= \sum_{i=0}^{s} \binom{d}{i} (q-1)^i$$

- $Y \subset L$ $\{t\}-((d,q), \lambda_1, \cdots, \lambda_t)$ design.

LEMMA 6 $\alpha \in X_i$, $\beta \in X_j$ $D(\alpha) \cap D(\beta) = \phi$ $i+j \leq t$

(1) $\lambda_i^j = |\{y \in Y \mid \alpha \leq y,\ D(\beta) \cap D(y) = \phi\}|$ const.

(2) $\lambda_i^j + q \lambda_{i+1}^{j-1} = \lambda_i^{j-1}$ $j \geq 1$

DEF 5 $\hat{N}_i^u \in \operatorname{Mat}(X_i, Y)$ $N_i^u[\alpha, y] = \begin{cases} 1 & \alpha \wedge y \in X_u \ \exists x \in X_d \text{ s.t } \alpha \leq x,\ y \leq \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

LEMMA 7 $i+j \leq t$
$$N_i \hat{N}_j^{uT} = \sum_{v=0}^{\min\{i,j\}} \binom{j-v}{u-v} \lambda_{i+u-v}^{j-u} \hat{W}_{ij}^v$$

PROPOSITION 8 Let $Y \subset L$ be a $\{2s\}-((d,q), \lambda_1, \cdots, \lambda_{2s})$-design

Suppose $\lambda_s^s \neq 0$ Then
$$|Y| \geq \operatorname{rank} N_s = \binom{d}{s} q^s$$

PROOF Since $0 \leq \lambda_i^j = \lambda_i^{j-1} - q\lambda_{i+1}^{j-1} \leq \lambda_i^{j-1}$, $\lambda_s^i \neq 0$ $0 \leq i \leq s$
$$N_s \hat{N}_s^{0T} = \lambda_s^s \hat{W}_{ss}^0$$
$$N_s \hat{N}_s^{1T} = s\lambda_{s+1}^{s-1} \hat{W}_{ss}^0 + \lambda_s^{s-1} \hat{W}_{ss}^1$$
$$\vdots$$
$$N_s \hat{N}_s^{sT} = \sum_{v=0}^{s-1} \binom{s-v}{u-v} \lambda_{2s-v}^0 \hat{W}_{ss}^v + \lambda_s^0 \hat{W}_{ss}^s$$

Hence $I = \hat{W}_{ss}^s \in \langle N_s \hat{N}_s^{uT} \mid 0 \leq u \leq s \rangle$

Thus $\exists M \in \operatorname{Mat}(Y, X_s)$ s.t. $I = N_s M$

Hence $|Y| \geq \operatorname{rank} N_s = \binom{d}{s} q^s$

COR. 9. (Nagao)

Let $Y \subseteq X_k$ be a $[2s]$-$((d,q),k,\lambda)$-design with $\lambda \neq 0$

If $k+s \leq d$ $\quad |Y| \geq \binom{d}{s} q^s$

PROOF. $\alpha \in X_s$. Since $\lambda_s \neq 0$, $\exists\, y \in Y$ s.t. $\alpha \leq y \in X_k$.

So $\exists\, \beta \in X_s$ s.t. $D(\beta) \cap D(y) = \phi$.

Hence $\lambda_s^s \neq 0$

3. Other Results.

PROPOSITION 10. The following are equivalent:

(1) $N_i^T N_i N_j^T N_j \in \langle N_l^T N_l \mid l = 0, \cdots, k \rangle$

for all $[t]$-$((d,q),k,\lambda)$ design $Y \subset X_k$ with $i+j \leq t \leq k$

(2) t, q, k satisfy one of the following

(i) $t = 0$ or 1

(ii) $q = 1$ $\quad$ i.e. $J(d,k)$, t-design

(iii) $k = d$ $\quad$ i.e. $H(d,q)$. orthogonal array

DEF 6 $\quad x_0 \in X \subseteq L = H(d,q)$

$\Delta_{q,x_0} = \Delta : H(d,q) \to H(d,q-1)$

$\alpha \in L = H(d,q)$ $\quad \bar{L} = H(d,q-1)$

$\Delta\alpha = \bar{\alpha}$ $\quad \bar{\alpha}[S] = \begin{cases} \alpha[S] & \alpha[S] \neq x_0[S] \\ \text{not defined} & \text{otherwise} \end{cases}$

i.e., $D(\bar{\alpha}) = \{ s \in D(\alpha) \mid \alpha[s] \neq x_0[s] \}$ and $\alpha|_{D(\bar{\alpha})} = \bar{\alpha}$

PROPOSITION 11 (1) $\bar{Y}$: $\{t\}$-$((d,q-1), \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_t)$-design

with $\bar{\lambda}_i = q^{-i}|\bar{Y}| \Rightarrow \Delta^{-1}(\bar{Y}) \cap X$ orthogonal array of strength t

(2) Y: orthogonal array of strength t

$\Rightarrow \Delta(Y)$ is a $\{t\}$-$((d,q-1), \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_t)$-design

with $\bar{\lambda}_i = q^{-i}|\Delta(Y)|$

談話会(1988/3/16)

運動量写像とグルボイド

秋田大学・教育学部　　三上健太郎

目的は Alan Weinstein (University of California, Berkeley) との共同の仕事 Moments and reduction for symplectic groupoids を運動量写像(momentum mapping)を key word としつつ、symplectic groupoids 研究の、三上の理解する発端および現状に触れながら概説することである。

準備として hamiltonian formalism を復習し、Souriau によって導入された運動量写像に関し、Noether の定理の成立、余随伴同変性(coadjoint equivariance)の同値命題、とくに Alan Weinstein の唱えた symplectic creed --- Everything is a lagrangian submanifold! 、および簡約化定理(reduction theorem of coadjoint equivariant momentum mapping)について述べる。以上について、リー群の cotangent bundle は典型例であり、更に自明でない symplectic groupoid の例になっていることに言及する。

本論：

1）symplectic groupoids の定義から直接 base space は lagrangian submanifold であり、且つ Poisson manifold になることをまず紹介する。その事実は "symplectic creed に従って幾つかの Poisson structures（すべてと言えないのが誠に残念であるが）を symplectic geometry の範疇に取り込む仲介役を symplectic groupoids が果たす" ことを示すとの基本的な認識をここで強調したい。

2）symplectic groupoids への group action に関する運動量写像の存在、特に余随伴同変性について得られた結果を、これまで知られた結果との関連をも含めて概説する。

3）groupoid action と moment の定義を述べ、group action と運動量写像写像(momentum mapping)を groupoid action と moment に一般化した経緯、および moment に関する reduction theorem の成立を概説する。

最後に symplectic groupoids に関し、今現在、三上が興味を持っている問題、派生した問題（ base space の幾何学的構造の持ち上げ可能性、Poisson Lie group 上の double symplectic groupoid structure の構成の試み、等）について述べる。

Title of Talk

A remark on association schemes on finite groups.

Abstract

We define a certain group HC(G) of any finite group G and use it to construct association schemes on G. More precisely, HC(G) is the group of permutations of the set G which fix the identity element, preserve inverse, and permute the (complex-valued) irreducible characters of G.

Cheng Kai Nah